EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN
(máximos y mínimos)

Obras que integran el bloque 7 (*Cálculo diferencial*):

Módulo I
Introducción al Cálculo diferencial

Módulo 2
Límite de una función

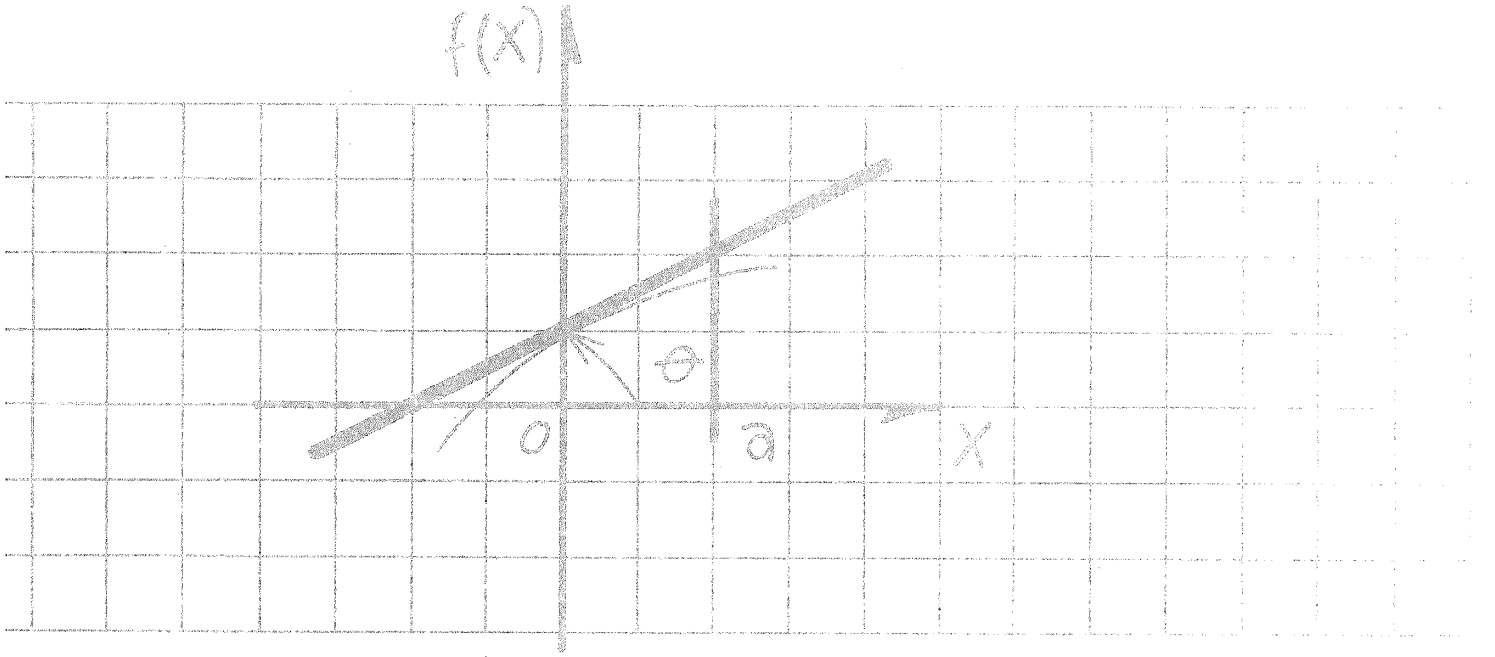
Módulo 3
Continuidad de una función

Módulo 4
Derivación de funciones algebráicas

Módulo 5
Derivación de funciones trascendentes

Módulo 6
Extremos de una función
(máximos y mínimos)

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 7

Cálculo diferencial

Módulo 6

EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN

(máximos y mínimos)

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN (MÁXIMOS Y MÍNIMOS)
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1985
ISBN 968-24-1431-8

Impreso en México

Esta obra se terminó de imprimir
el día 2 de enero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO RIC KC 100

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MODULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

6.1 Función creciente o decreciente 9

6.2 Extremos relativos de una función 30

6.3 Extremos absolutos de una función 60

6.4 Concavidad y puntos de inflexión 66

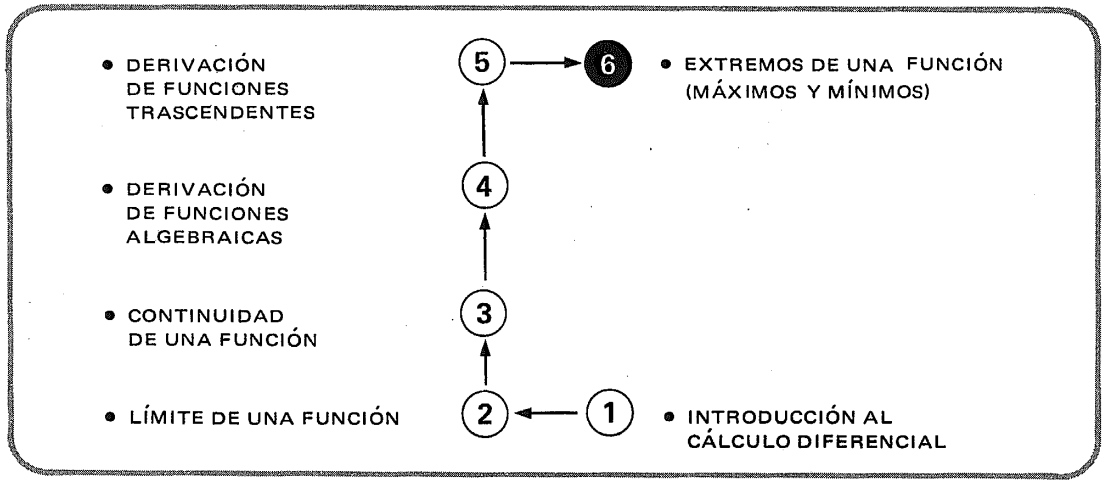
6.5 Extremos relativos. Criterio de la segunda derivada 84

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 7. Cálculo diferencial

Objetivos: derivar funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 7



Módulo 6. Extremos de una función (máximos y mínimos)

Objetivos: determinar los extremos de una función

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Continuidad y límite de una función	7	2, 3
• Derivación de funciones algebraicas o trascendentes	7	1, 4, 5

6.1

Función creciente o decreciente

1

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

Queremos conocer la naturaleza del lugar geométrico representado.

2

Sabemos que:
la primera derivada $f'(x)$
representa
la pendiente de la recta tangente a la curva
en un punto cualquiera $[x, f(x)]$,
o más brevemente,

la pendiente de la curva f en $[x, f(x)]$.

3

Determinemos la primera derivada de f.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

$f'(x) =$

$x^2 + x - 6$

4

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

Por ejemplo, $f(-1)$ ↓

en el punto $(-1, \square)$

la pendiente de la curva es igual a: $\square$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 6(-1) + 1$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6 + 1$$

- $\frac{43}{6}$
- $f'(-1) = (-1)^2 + (-1) - 6$
  $= -6$

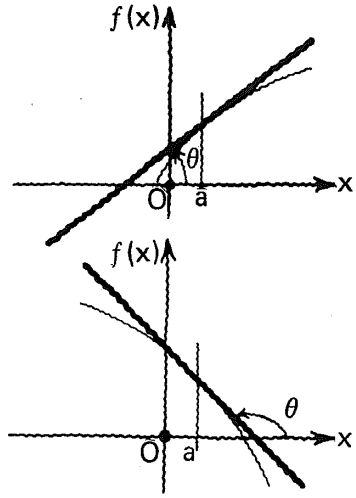
5

Si **a** es la abscisa de un punto de la curva f, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en **a**

θ = **arc tan** $f'(a)$

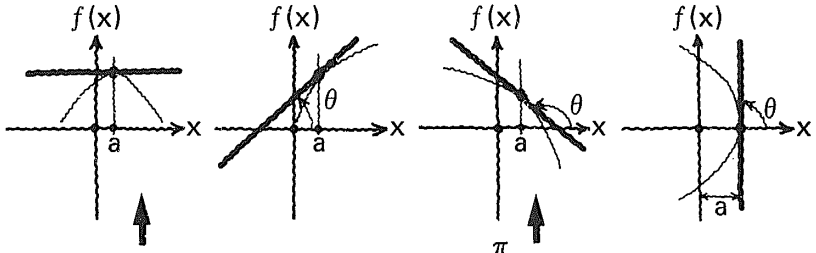
$0 \leqslant \theta < \pi$

es la medida del **ángulo de dirección** de la curva, en **a**.



6

Estudiar con atención.



- Si $\theta = 0$

  $\tan\theta = f'(a) =$ ⌊_____⌋

- Si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

  $\tan\theta = f'(a)$ ⌊_____⌋

- Si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

  $\tan\theta = f'(a)$ ⌊_____⌋

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

  $\tan\theta = f'(a)$ ⌊_____⌋

- 0
- < 0
- > 0
- no está definida

7

Para nuestra función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

cuya derivada está dada por

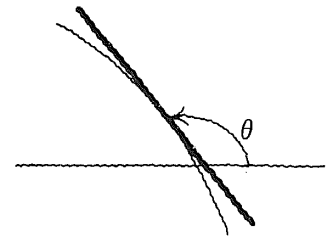
$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

hemos encontrado

$$f'(-1) = -6$$

El hecho de que $f'(-1)$ sea **negativa** significa que

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



para $x = -1$, la recta tangente a la curva f es decreciente

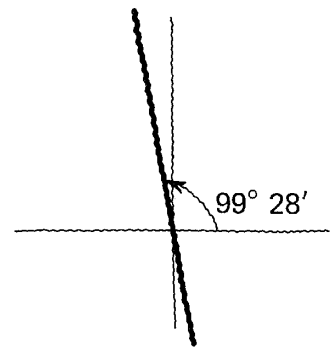
8

$$f'(-1) = -6$$

El **ángulo de dirección** de la curva en $x = -1$, tiene por medida:

$\theta =$ ⌊_____⌋ $=$ ⌊_____⌋

expresión general



arc tan $(-6) \doteq 99°28'$

para $0 \leqslant \theta < \pi$

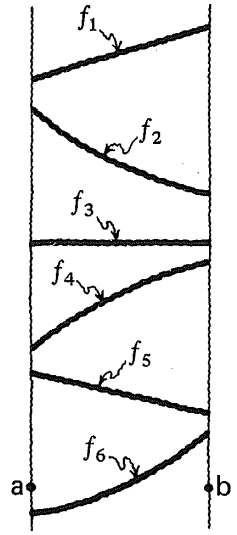
9

Ahora,
revisemos nuestra noción
de

función creciente o decreciente.

10

En el intervalo (a, b):
las funciones [_____]
son **crecientes**;
las funciones [_____]
son **decrecientes**;
las funciones [_____]
no son ni **crecientes, ni decrecientes.**



f_1, f_4 y f_6

f_2 y f_5

f_3

11

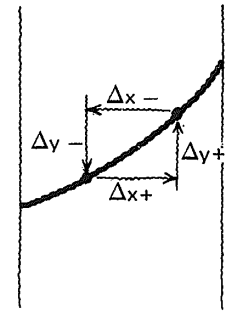
Para una función $y = f(x)$
creciente en un intervalo dado,

si x aumenta
$y = f(x)$ [_____]

si x disminuye
$y = f(x)$ [_____]

Es decir, que
ambos incrementos (Δx y Δy)
tienen el mismo signo,
por lo que
la razón de ellos $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$
es siempre

positiva/negativa.



aumenta

disminuye

positiva

12

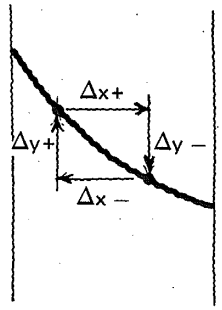
Para una función $y = f(x)$ **decreciente**, en un intervalo dado:

si x aumenta
$y = f(x)$ [ ]

si x disminuye
$y = f(x)$ [ ]

O sea, que
los dos incrementos (Δx y Δy)
tienen signos **iguales/contrarios**
por lo que
la razón de ellos $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$
es siempre

positiva/negativa.



disminuye

aumenta

contrarios

negativa

13

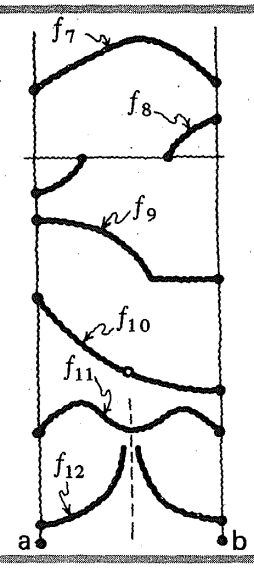
Intentemos señalar las opciones correctas.

En el intervalo [a, b]

las funciones [ ]
son **crecientes**;

las funciones [ ]
son **decrecientes**,

las funciones [ ]
no son **ni crecientes ni decrecientes**.



Vamos a establecer de manera formal el concepto de función creciente o decreciente.

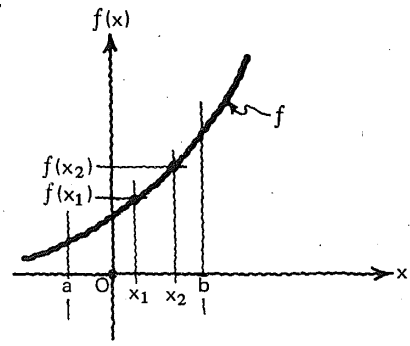
14

Estudiar con atención.

Diremos que:
una función $y = f(x)$
definida para toda x
de un intervalo dado,
es **creciente** en ese intervalo
si y sólo si se cumple

para toda $x_2 > x_1$

$$f(x_2) > f(x_1)$$

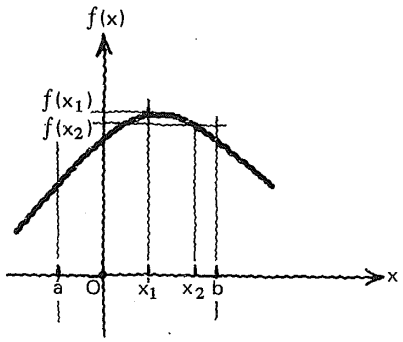


15

De acuerdo con la definición anterior,
la función f_1

es/no es creciente

en el intervalo [a, b]
porque



no es

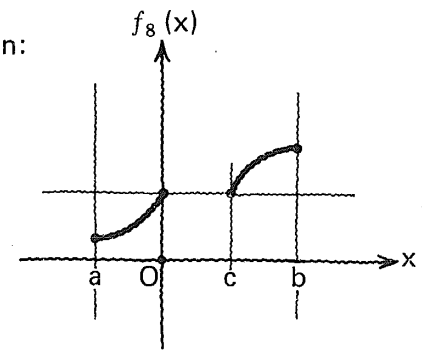
existe al menos
una $x_2 > x_1$
para la cual
$f(x_2) \not> f(x_1)$

16

De acuerdo con la definición:
la función f_8

es/no es creciente

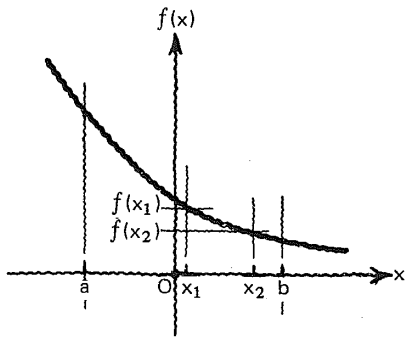
en el intervalo [a, b]
porque



no tiene sentido
afirmar si es
creciente o no
f_8 no está definida para
toda x en el intervalo
[a, b], y la definición
pide que la función esté
definida para toda x del
intervalo dado para
determinar si es
creciente o no.

17

Intentemos, ahora,
dar la definición
de una **función**
decreciente.



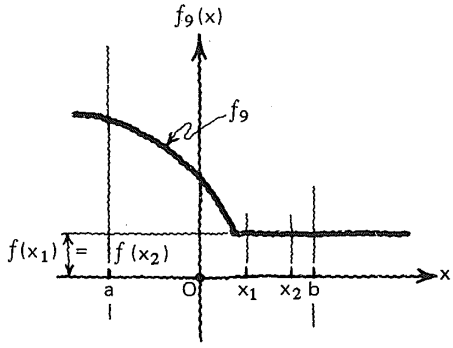
Una función $y = f(x)$
definida para toda x
de un intervalo dado,
es **decreciente** en ese
intervalo,
si y sólo si
se cumple **para toda**
$x_2 > x_1$:
$f(x_2) < f(x_1)$.

18

De acuerdo con la definición:
la función f_9

es/no es decreciente

en el intervalo [a, b]
porque:



no es

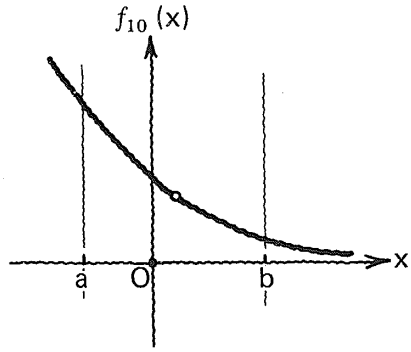
hay al menos una
$x_2 > x_1$
para la que
$f(x_2) \not< f(x_1)$

19

De acuerdo con la definición:
la función f_{10}

es/no es decreciente

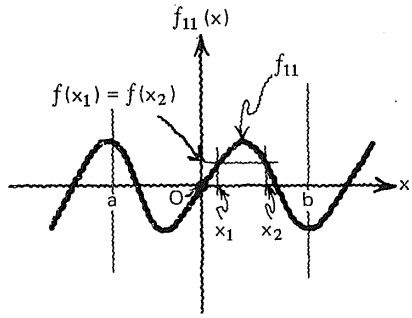
en el intervalo [a, b]
porque:



no tiene sentido decir si es creciente o no

la función f_{10} no está definida para toda x del intervalo [a, b].

20



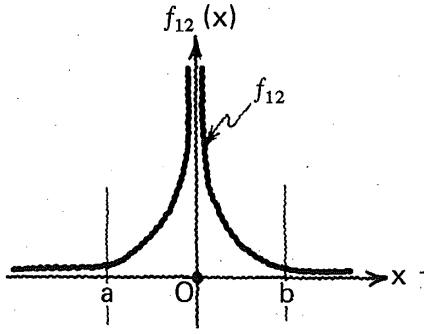
La función f_{11} { es creciente / es decreciente / no es ni creciente ni decreciente } en el intervalo [a, b], porque

no es ni creciente ni decreciente

por ejemplo, hay al menos una $x_2 > x_1$ para la cual

$f(x_2) \not> f(x_1)$ o
$f(x_2) \not< f(x_1)$

21



La función f_{12} { es creciente / es decreciente / no es ni creciente ni decreciente } en el intervalo [a, b], porque _____

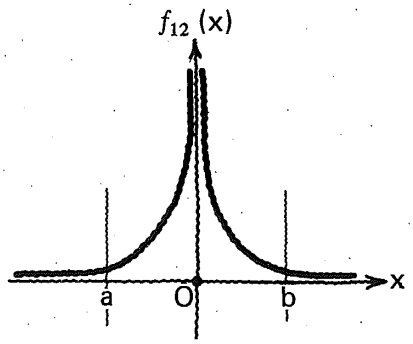
no tiene sentido afirmar que f_{12} es creciente o no, porque no está definida para toda x en [a, b]

22

Ahora bien,

si $\lim_{x \to 0^-} f_{12}(x) = +\infty$

y $\lim_{x \to 0^+} f_{12}(x) = +\infty$

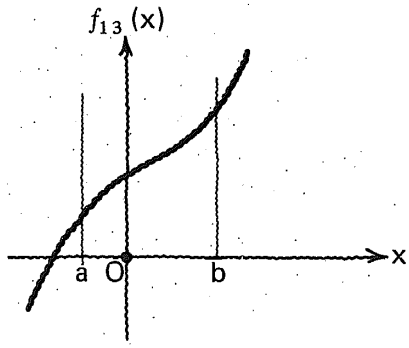


f_{12} es { **creciente** en el intervalo { **[a, 0]** V/F ; **[a, 0)** V/F } ; **decreciente** en el intervalo { **[0, b]** V/F ; **(0, b]** V/F }

F
V
F
V

23

f_{13} **es/no es creciente** en el intervalo [a, b].



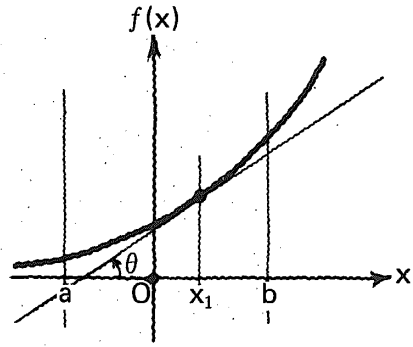
es

24

Sabemos que: la primera derivada $f'(x)$ de una función f es la **pendiente de la curva** es un punto de abscisa.
Diremos que:

- si $f'(x_1) > 0$ entonces f **es creciente en** x_1
  y
- si $f'(x) > 0$ entonces f **es creciente en el intervalo** $[a, b]$

para toda $x \in (a, b)$ y siendo f continua en $[a, b]$



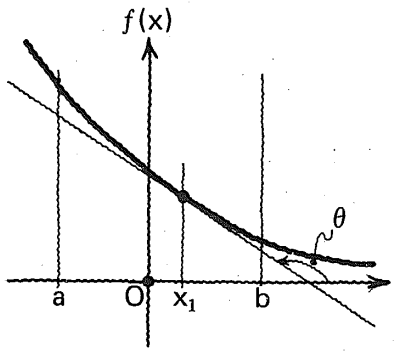
25

Similarmente,

- si $f'(x_1) < 0$ entonces [ ]
  y
- si $f'(x) < 0$

para toda $x \in (a, b)$ y f es continua en $[a, b]$,

entonces [ ]



f es decreciente en x_1

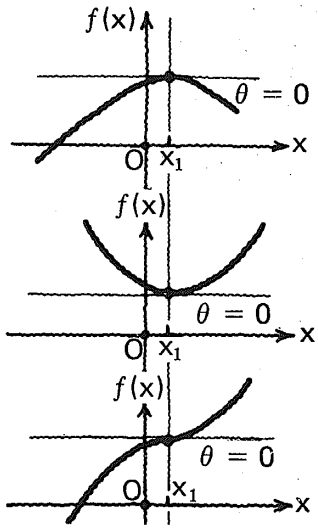
f es decreciente en $[a, b]$

26

Además:

si $f'(x_1) = 0$

diremos que la función f es **estacionaria** en x_1.



27

Por ejemplo:

la función f definida por $f(x) = -x + 3$ { es creciente / es decreciente / no es creciente / ni decreciente } en el intervalo [0, 10]

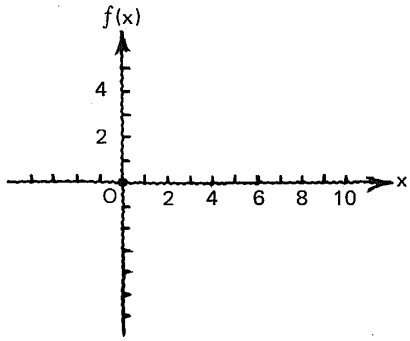
porque:

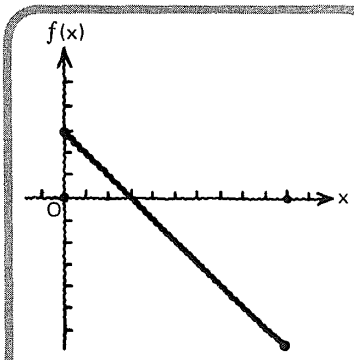
es decreciente

f es continua en [0, 10] (una función polinomial es continua en todo número real)
y
$f'(x) = -1 < 0$
$\forall\ x \in (0, 10)$

28

Veámoslo en forma gráfica.





Desde luego, si f es decreciente en el intervalo cerrado [0, 10] también lo será en el intervalo abierto (0, 10), o en cualquier otro intervalo I, tal que: $I \subseteq [0, 10]$.

29

La función g definida por $g(x) = \frac{x^2}{4}$ { es creciente / es decreciente / no es creciente / ni decreciente } en el intervalo [0, 5]

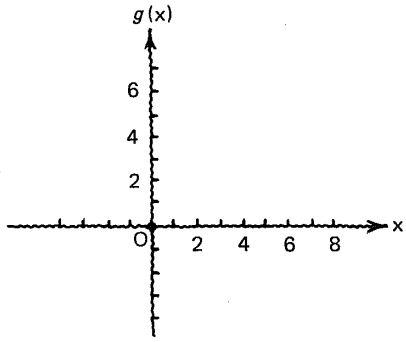
porque:

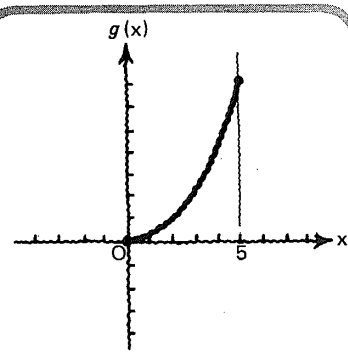
creciente

g es continua en [0, 5], puesto que es una función polinomial es continua para toda $x \in \mathbb{R}$
y
$\forall\ x \in (0, 5), g'(x) = \frac{x}{2} > 0$

30

Gráficamente.





Desde luego, si g es creciente en el intervalo cerrado $[0, 5]$ también lo será en el intervalo abierto $(0, 5)$ o en cualquier intervalo I, tal que: $I \subseteq [0, 5]$.

31

La función h definida por $h(x) = \frac{1}{x}$ { es creciente / es decreciente / no es creciente / ni decreciente } en el intervalo $[-1, 1]$

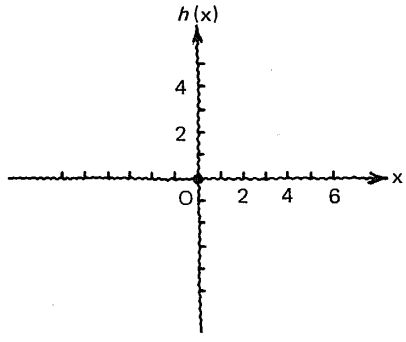
porque:

no tiene sentido afirmar que es creciente o no

h no es continua en $[-1, 1]$, puesto que $h(0)$ no está definida

32

Tracemos la gráfica de h.



Respuesta en el cuadro siguiente

Podemos decir que:

la función h, definida por

$h(x) = \frac{1}{x}$ con $-1 \leqslant x \leqslant 1$ y $x \neq 0$

es

creciente en los intervalos [ ]

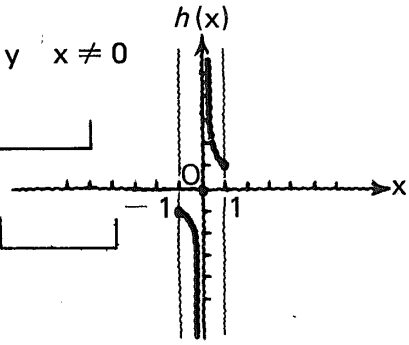
y [ ]

decreciente en los intervalos [ ]

y [ ]

porque:

[ ]



- h es decreciente en los intervalos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$
- h es continua para $(-1 \leqslant x < 0) \cup (0 < x \leqslant 1)$ (una función racional es continua para todos los números de su dominio),

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$

$\forall x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$

33

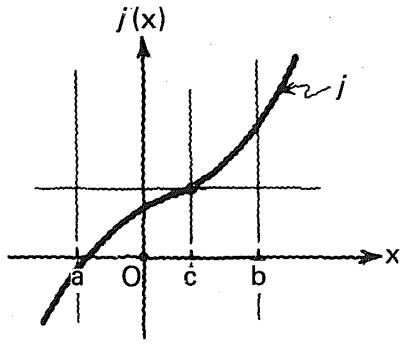
Atención.

Para la función j, representada por la gráfica adjunta,

$f'(c) = 0$
y
$f'(x) > 0$

para toda $x \in (a, b) \wedge x \neq c$

De acuerdo con la definición que hemos establecido:
f **es/no es creciente**
en el intervalo [a, b].



- es creciente ya que para toda $x_2 > x_1$ $f(x_2) > f(x_1)$

7.6.1.1

Práctica adicional
de
determinación del carácter creciente
o decreciente de una función,
en un intervalo dado,

si se considera necesario.

34

Algunas funciones son crecientes o decrecientes en todo su dominio.

Por ejemplo:

la función $f(x) = 3x + 2$ es { **creciente** / **decreciente** } para todo su dominio

porque:

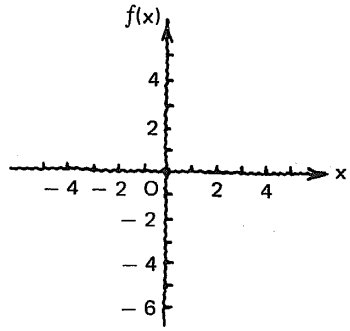
└──────────┘

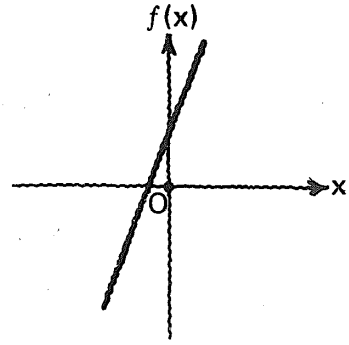
es creciente

el dominio de f es $\mathbb{R}$,
f es continua para toda $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = 3$, y
$f'(x) > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$

35

Bosquejar la gráfica correspondiente





36

La función $g(x) = \sqrt{x-2}$ es/no es { **creciente** / **decreciente** } para todo su dominio

porque:

└──────────┘

Estudiar con atención.

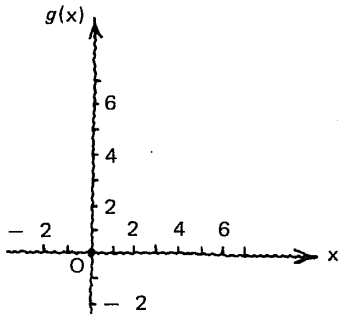
es creciente para todo su dominio

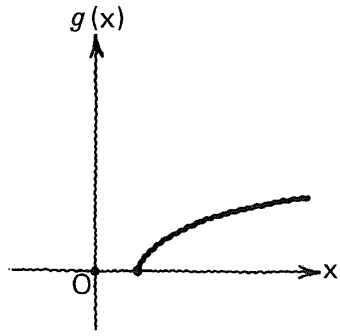
el dominio de g es $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 2\}$,
g es continua para toda $x \in [2, +\infty)$

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ y
$g'(x) > 0, \forall x \in (2, +\infty)$

37

Bosquejar la gráfica correspondiente





g es creciente en $[2,+\infty)$.

7.6.1.2

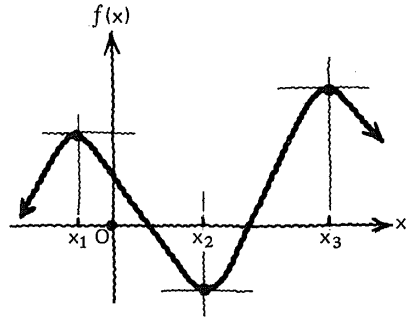
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

38

Existen funciones que son **crecientes** para alguno o algunos intervalos de su dominio, y **decrecientes** para otro u otros.

39

Por ejemplo:



la función f representada gráficamente,

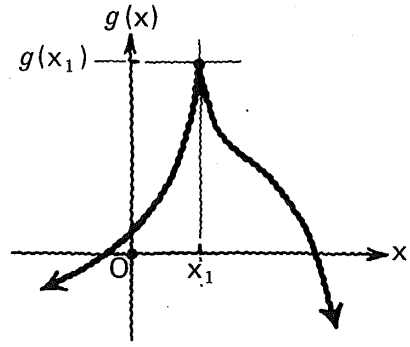
- es **creciente** en los intervalos abiertos $(-\infty, x_1)$ y [_____]
- es **estacionaria** en x_1, [_____]
- es **decreciente** en los intervalos abiertos [_____] y [_____]

- (x_2, x_3)
- x_2 y x_3
- (x_1, x_2) y $(x_3, +\infty)$

También es válido decir por ejemplo que

- f es creciente en el intervalo cerrado $[x_2, x_3]$
- o que f es decreciente en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$

40



La función g

es **creciente** en el intervalo abierto $(-\infty, x_1)$
o en el intervalo semiabierto $(-\infty, x_1]$,

y

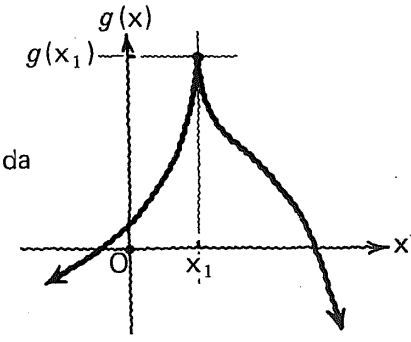
es **decreciente** en el intervalo abierto [_____]
o en el intervalo semiabierto [_____]

- $(x_1, +\infty)$
- $[x_1, +\infty)$

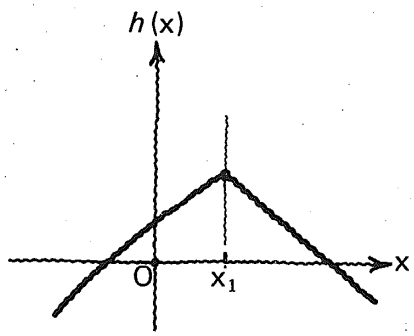
41

En x_1:

- la primera derivada de g (es decir, la pendiente) no está definida
- la recta tangente a la curva en el punto $[x_1, g(x_1)]$ es vertical
- la función no es creciente, ni decreciente, ni estacionaria



42

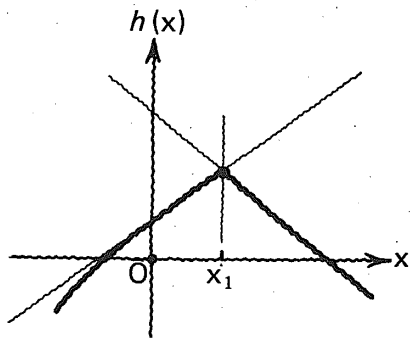


La función *h*

es **creciente** en el intervalo abierto [ ]
o en el intervalo semiabierto [ ]
y
es **decreciente** en el intervalo abierto [ ]
o en el intervalo semiabierto [ ]

$(-\infty, x_1)$
$(-\infty, x_1]$
$(x_1, +\infty)$
$[x_1, +\infty)$

43



En x_1 :

- $h'(x_1)$ **existe/no existe**
- la función no es creciente, ni decreciente, ni estacionaria.

- no existe

las **derivadas unilaterales** $h'_-(x_1)$ y $h'_+(x_1)$ existen, pero son diferentes; por lo tanto, la **derivada bilateral** $h'(x_1)$ no existe

44

Vamos, ahora, a determinar los intervalos para los que la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

es creciente o decreciente.

45

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

La primera derivada de esta función la hemos ya calculado, y está dada por:

$f'(x) = x^2 + x - 6$

46

Veamos, en primer lugar, si existen puntos en que f es **estacionaria**.
En tales puntos deberá verificarse que:

$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0$

47

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0$$

Resolviendo para x, obtenemos:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$x_1 =$ -3

$x_2 =$ 2

48

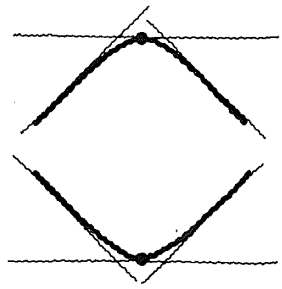
En $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$
la función f es estacionaria.

En cada uno de estos números
la función cambia

- de creciente a decreciente →

o

- de decreciente a creciente →



49

Los números $x_1 = -3$ y $x_2 = 2$
dividen al dominio de f, que es igual a: ⌊_____⌋

$\mathbb{R}$

en los 3 intervalos abiertos:

⌊_____⌋ ⌊_____⌋ y ⌊_____⌋

$(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$, $(2, +\infty)$

50

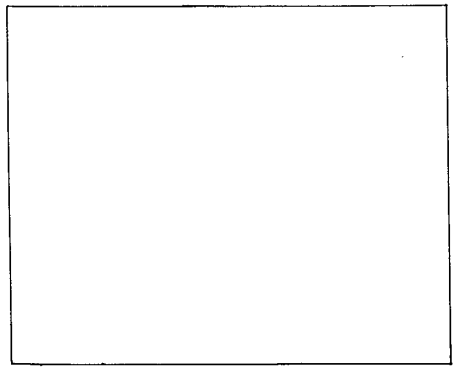
Para encontrar los **intervalos** abiertos
en que la **función** es **creciente**,
resolvemos la desigualdad:

⌊_____⌋

$f'(x) = x^2 + x - 6 > 0$

51

$f'(x) = x^2 + x - 6 > 0$



f es creciente en $\square$

$x^2 + x - 6 > 0$

$\downarrow$

$(x + 3)(x - 2) > 0$

$x + 3 > 0 \quad x > -3$ $\qquad$ $x + 3 < 0 \quad x < -3$

$x - 2 > 0 \quad x > 2$ $\qquad$ $x - 2 < 0 \quad x < 2$

$S_1 = (2, +\infty)$ $\qquad$ $S_2 = (-\infty, -3)$

$S = (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

$(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$

52

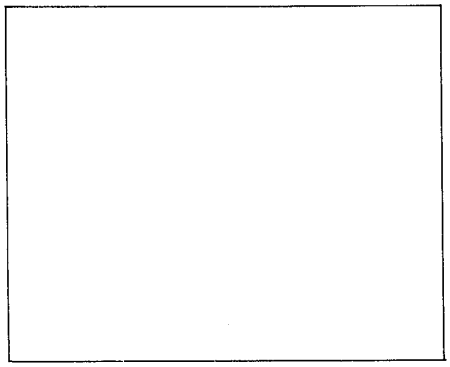
La función f deberá ser **decreciente** en el intervalo $(-3, 2)$.
Verificamos esto resolviendo la desigualdad:

$\square$

$f'(x) = x^2 + x - 6 < 0$

53

$f'(x) = x^2 + x - 6 < 0$



f es decreciente en $\square$

$x^2 + x - 6 < 0$

$\downarrow$

$(x + 3)(x - 2) < 0$

$x + 3 > 0 \quad x > -3$ $\qquad$ $x + 3 < 0 \quad x < -3$

$x - 2 < 0 \quad x < 2$ $\qquad$ $x - 2 > 0 \quad x > 2$

$S_1 = (-3, 2)$ $\qquad$ $S_2 = (\ \ )$

$S = (-3, 2)$

$(-3, 2)$

54

Resumiendo los resultados obtenidos,

La función definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

- es **creciente** en el intervalo abierto [ ]
- es **estacionaria** en [ ]
- es **decreciente** en el intervalo abierto [ ]
- es **estacionaria** en [ ]
- es **creciente** en el intervalo abierto [ ]

$(-\infty, -3)$

-3

$(-3, 2)$

2

$(2, +\infty)$

55

Si determinamos los valores de $f(x)$ para los números en que la función es estacionaria, tendremos una idea aproximada del lugar geométrico representado.

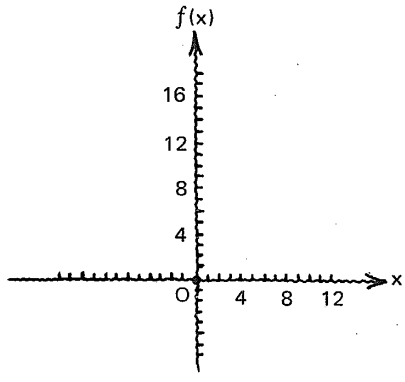
$f(-3) =$ [ ]

$f(2) =$ [ ]

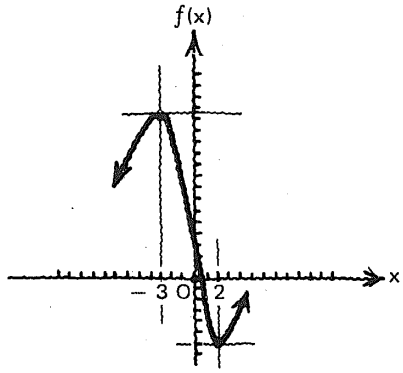
- $\frac{29}{2}$ (ó 14.5)
- $-\frac{19}{3}$ (ó −6.33...)

56

Representemos gráficamente los resultados obtenidos.



Respuesta en el cuadro siguiente



7.6.1.3

Práctica adicional
de
determinación de los intervalos
en que una función dada
es
creciente o decreciente
y los números en que dicha
función es estacionaria,
si se considera necesario.

7.6.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el carácter creciente o decreciente de una función en un intervalo dado;
- *determinar* los intervalos en que una función dada es creciente o decreciente, y los números en que dicha función es estacionaria.

6.2

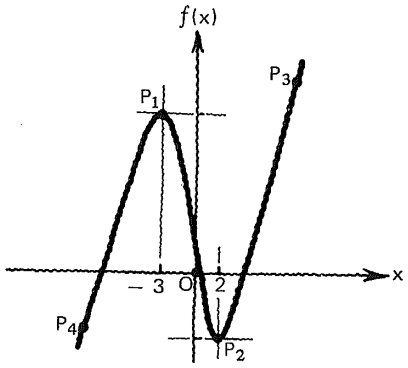
Extremos relativos de una función

57

En este bosquejo inicial para la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

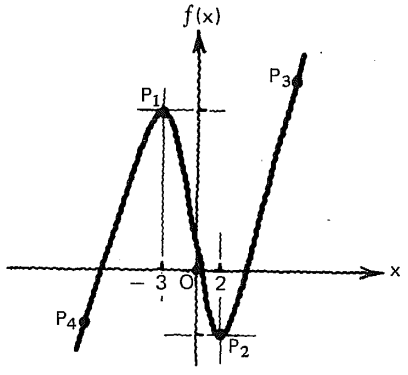
Vemos que en los puntos P_1 y P_2 en que la función es estacionaria, ésta alcanza los valores $f(-3) = 29/2$ y $f(2) = -19/3$, que se denominan **extremos relativos** de la función.



58

Observamos que:

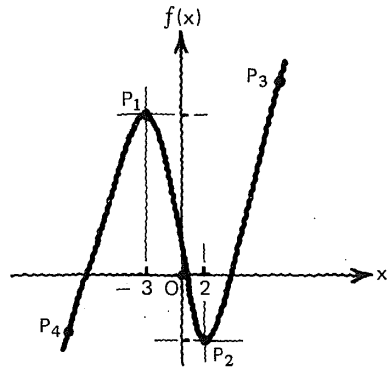
- $f(-3)$ es un valor de la función mayor que cualquier otro "en las proximidades" de P_1, y se llama: **máximo relativo** de la función.
- $f(2)$ es un valor de la función menor que cualquier otro "en las proximidades" de P_2, y se le llama: **mínimo relativo** de la función.



59

Debemos observar, también, que:

- $f(-3)$ **no es el máximo valor que la función** puede asumir en su dominio, por ejemplo, al punto P_3 corresponde un valor mayor que ese máximo relativo;
  y
- $f(2)$ **tampoco** es el **mínimo** valor que puede tener la función en su dominio, por ejemplo, en P_4 la función adquiere un valor menor que el mínimo relativo considerado.



60

Nos interesan
por el momento,
los **extremos relativos**
de una función.
Posteriormente,
estudiaremos
los llamados
extremos absolutos.

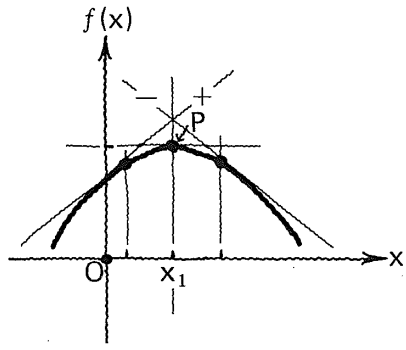
61

Estudiar con atención.

Si existe un **máximo relativo** $f(x_1)$ en x_1 y si existe $f'(x_1)$,

entonces $f'(x_1) = 0$

Además, al pasar por P,
la función cambia
de creciente a decreciente
es decir que:



- $f'(x) > 0$ para valores de x "un poco menores que x_1"
  y
- $f'(x) < 0$ para valores de x "un poco mayores que x_1"

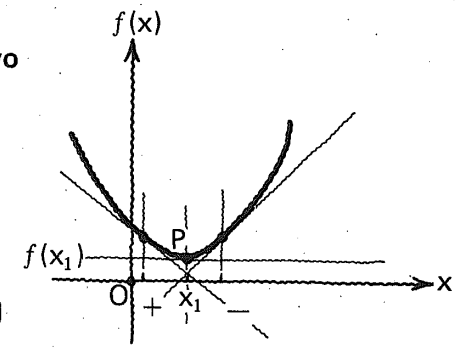
62

Si existe un **mínimo relativo** $f(x_1)$ en x_1
y si existe $f'(x_1)$,
entonces:

[ ]

Además, al pasar por P
la función cambia
del [ ] a [ ]
o sea que:

- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]
  y
- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]



$f'(x_1) = 0$

decreciente creciente

< 0 "un poco menores que x_1"

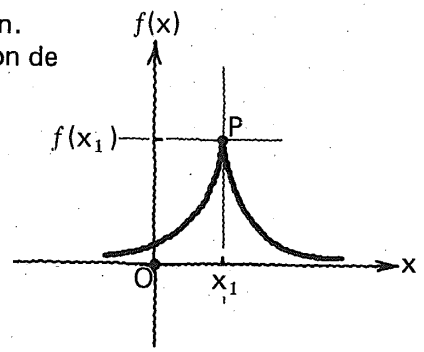
> 0 "un poco mayores que x_1"

63

Analicemos esta otra situación.
De acuerdo con nuestra noción de
extremos relativos,
¿existe un
máximo relativo en x_1 ?

Sí/No

Si existe, es igual a [ ]



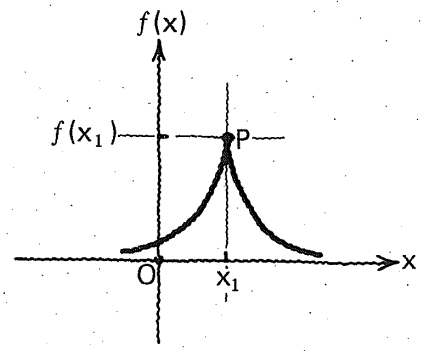
Sí

$f(x_1)$

64

¿Existe $f'(x_1)$?

Sí/No

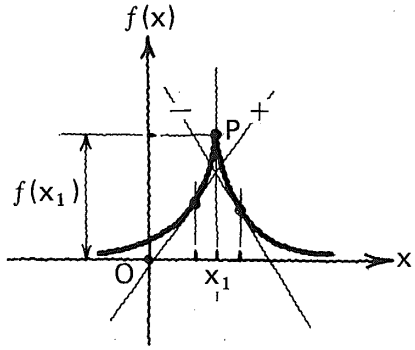


No

65

En P,
la función cambia
de
[ ]

a
[ ]



es decir que:

- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]

y

- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]

creciente

decreciente

- > 0 • "un poco menores que x_1"
- < 0 • "un poco menores que x_1"

66

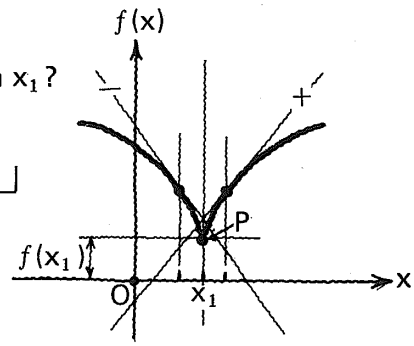
Similarmente,
¿existe un **mínimo relativo** en x_1?

Sí/No

Si existe, es igual a [ ]

¿Existe $f'(x_1)$?

Sí/No



Sí

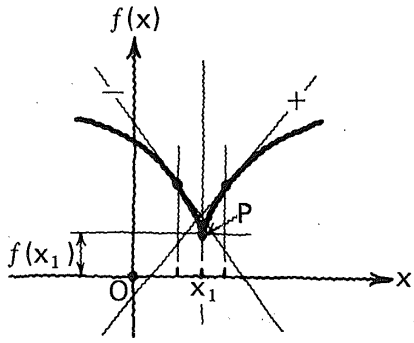
$f(x_1)$

No

67

En P,
la función cambia
de
[ ]

a
[ ]



es decir que:

- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]

y

- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]

decreciente

creciente

- < 0 • "un poco menores que x_1"
- > 0 • "un poco mayores que x_1"

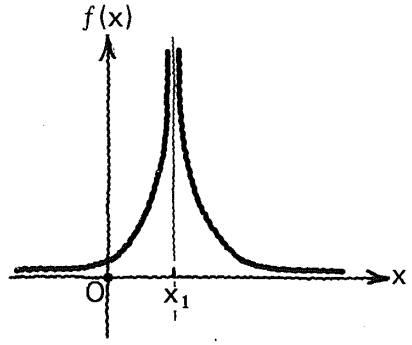
68

Una función más.

¿Existe un **máximo relativo** en x_1 ?

Sí/No

si existe, es igual a ⌊_____⌋



No

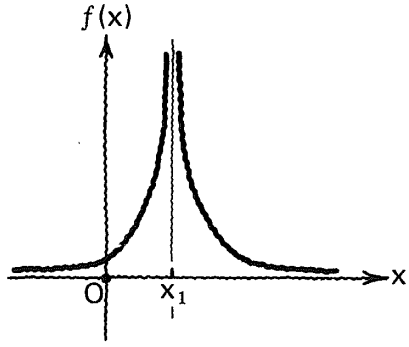
69

¿Existe $f(x_1)$?

Sí/No

¿Existe $f'(x_1)$?

Sí/No



No

No

70

Para esta otra función.

¿Existe un **máximo** o un **mínimo relativo** en x_1 ?

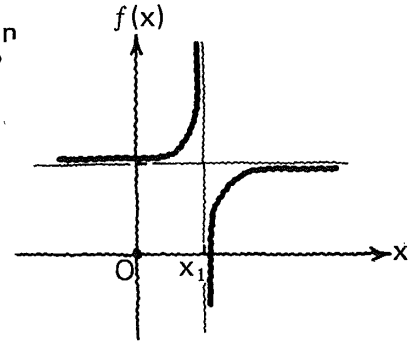
Sí/No

¿Existe $f(x_1)$?

Sí/No

¿Existe $f'(x_1)$?

Sí/No



No

No

No

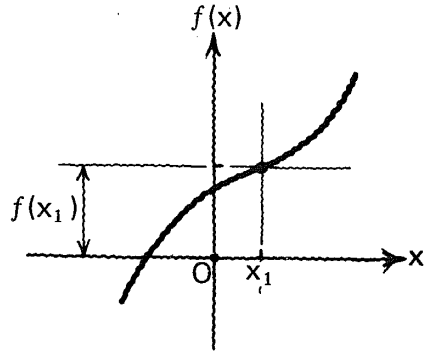
71

En este caso:
¿Existe un máximo o un mínimo relativo en x_1?

Sí/No

¿Existe $f(x_1)$?

Sí/No



No

Sí

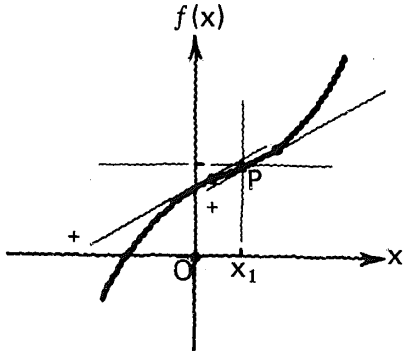
72

Al pasar por el punto P, la función

[ ]

o sea que:

- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]
  y
- $f'(x)$ [ ] para valores de x [ ]



no cambia su carácter creciente (es creciente antes y después de P)

- > 0 • "un poco menores que x_1"
- > 0 • "un poco mayores que x_1"

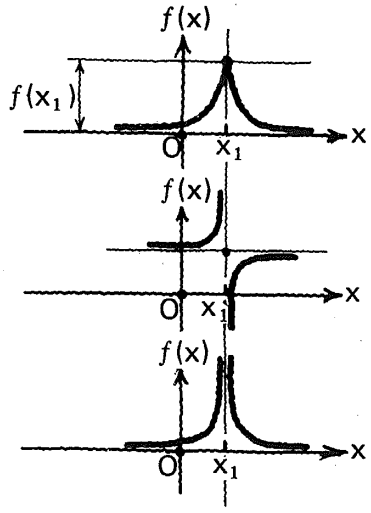
73

Para las funciones aquí representadas

$$f'(x) = \infty$$

si nos permitimos este simbolismo, o equivalentemente:

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$



74

Podemos bosquejar
el siguiente procedimiento
para
determinar los
extremos relativos de una función,
si tales extremos existen.

Ver cuadros siguientes.

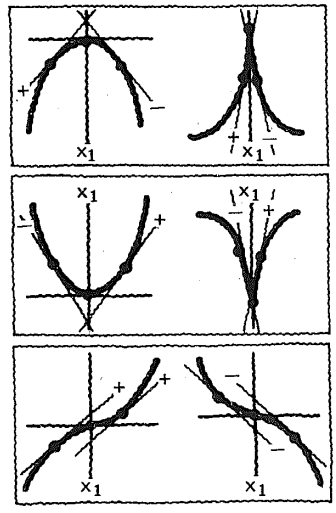
75

Criterio de la primera derivada para la determinación de los extremos relativos de una función $f(x)$.

1. *Determinar* $f'(x)$
2. 2.1. *Resolver* para x la ecuación $f'(x) = 0$
   Las raíces reales de esta ecuación son los números en que la función es estacionaria.
   2.2. *Resolver* para x la ecuación $\dfrac{1}{f'(x)} = 0$
   Las raíces reales de esta ecuación son los números en que la tangente a la curva es vertical.
   A los números encontrados en 2.1 y 2.2 se les llama **valores críticos** *de x y a los puntos correspondientes a tales números se les conoce como* **puntos críticos** *de la función.*

76

3. *Calcular* $f'(x)$ para un valor de x "un poco menor que x_1" y $f'(x)$ para un valor de x "un poco mayor de x_1", siendo x_1 cada uno de los números críticos considerados por separado.
   - Si $f'(x)$ resulta **primero positiva** y **luego negativa** f **tiene un máximo** relativo igual a $f(x_1)$ **en** x_1.
   - Si $f'(x)$ resulta **primero negativa** y **luego positiva** f **tiene un mínimo** relativo igual a $f(x_1)$ **en** x_1.
   - Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en ambos casos, f **no tiene ni un máximo ni un mínimo** relativos **en** x_1.



77

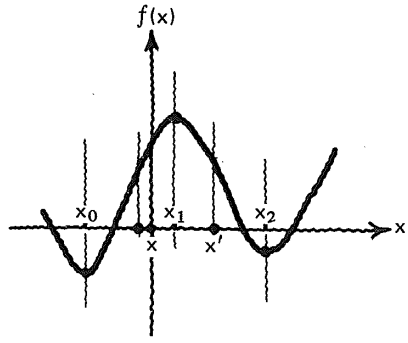
Cuando decimos:
un "valor de x un poco menor que x_1"
debemos entender:
un número x tal que:

$$x_0 < x < x_1$$

siendo x_0 el número crítico inmediatamente inferior a x_1.
Y cuando decimos:
un "valor de x' un poco mayor que x_1"
nos referimos a *un número x' tal que:*

$$x_1 < x' < x_2$$

en que x_2 es el número crítico inmediatamente superior a x_1.



78

Tenemos la función

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$$

de la cual
queremos conocer sus extremos relativos,
si existen.

79

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$$

1. Determinar $f'(x)$.

$f'(x) =$ [ ]

$3x^2 - 10x + 10$

80

2.1. Resolver para x la ecuación:

$3x^2 - 10x + 10 = 0$

81

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 10 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 120}}{6}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{6}$$

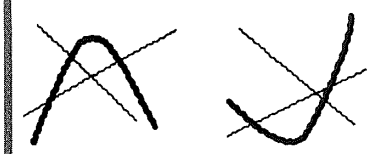
números reales no definidos

82

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 10$

La no existencia de raíces reales para la ecuación $3x^2 - 10x + 10 = 0$, significa que



no hay puntos críticos en que la función f es estacionaria

83

2.2. Resolver para x la ecuación:

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2 - 10x + 10} = 0$$

84

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2 - 10x + 10} = 0$$

Conclusión:

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $3x^2 - 10x + 10$; obtenemos:

$1 = 0$

proposición cerrada falsa

no existen raíces para la ecuación

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

85

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 10$$

La no existencia de raíces para la ecuación $\frac{1}{f'(x)} = 0$ significa que

no existen puntos en que la tangente a la curva f es vertical

86

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 10$

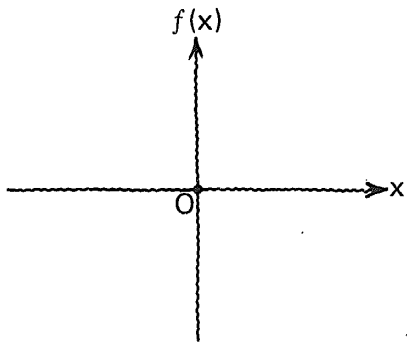
Conclusión: [_____]

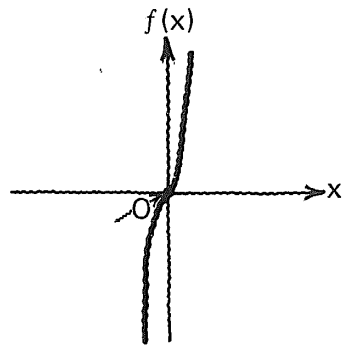
la función f no tiene extremos relativos

87

Representación gráfica de la función

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x$





88

Se requiere determinar los **extremos relativos** de la función

$f(x) = x^2 + 2x - 3,$

si existen.

89

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

1. Determinar $f'(x)$.

$f'(x) = 2x + 2$

90

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 2x + 2$

2.1. Resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

$2x + 2 = 0$

$2x = -2$

$x = -1$

91

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 2x + 2$

Un número crítico en que f es estacionaria es -1.

2.2. Resolver la ecuación $\frac{1}{f'(x)} = 0$.

$\frac{1}{2x + 2} = 0$

no tiene raíces

92

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f'(x) = 2x + 2$

El único número crítico es **−1**.

93

$f(x) = x^2 + 2x \quad 3$

$f'(x) = 2x + 2$

número crítico único $x_1 = -1$

3. Calcular $f'(x)$ para un valor de x "un poco menor que x_1" y $f'(x)$ para un valor de x "un poco mayor que x_1".

por ejemplo: $f'(-2) =$ [ ]

$f'(0) =$ [ ]

Como $f'(-2)$ es **positiva/negativa**
y $f'(0)$ es **positiva/negativa**
para −1 hay un [ ] relativo
igual a [ ].

−2

2

negativa

positiva

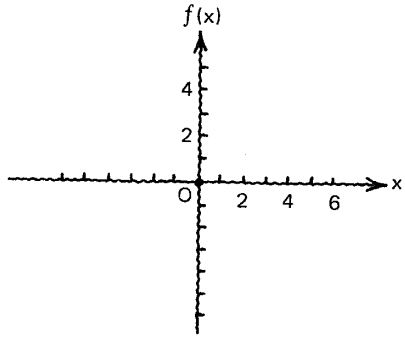
mínimo

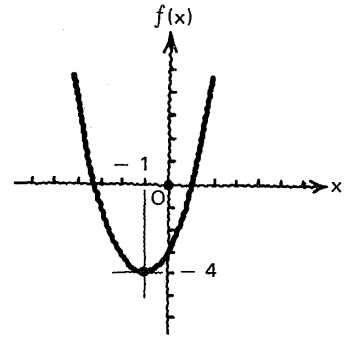
$f(-1) = -4$

94

Veámoslo gráficamente, trazando la curva correspondiente a

$f(x) = x^2 + 2x - 3.$





95

Determinar los **extremos relativos** de la función

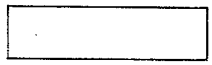
$$f(x) = 2x + 3$$

si tales extremos existen.

96

$$f(x) = 2x + 3$$

1. ⌊_____⌋



Determinar $f'(x)$

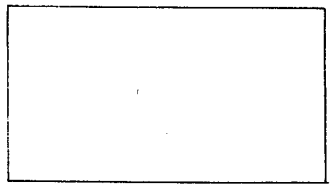
$f'(x) = 2$

97

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f'(x) = 2$$

2.1. ⌊_____⌋



Resolver la ecuación $f'(x) = 0$

$2 = 0$ es una proposición cerrada falsa

la ecuación $f'(x) = 0$ no tiene raíces

98

$f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 2$

2.2.

Resolver la ecuación

$\frac{1}{f'(x)} = 0$

$\frac{1}{2} = 0 \leftarrow$ **PCF**

la ecuación $\frac{1}{f'(x)} = 0$

no tiene raíces

99

$f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = 2$

f no tiene números críticos;

esto significa que:

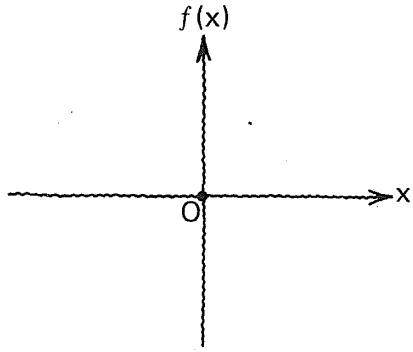
no existen extremos relativos para la función considerada

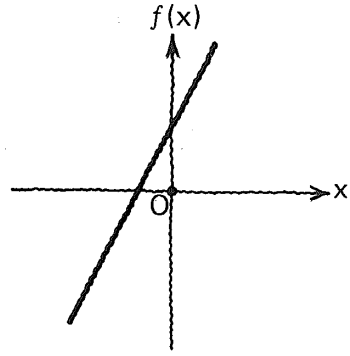
100

Viéndolo gráficamente,

f es **creciente/decreciente**

en todos los números de su dominio.





● creciente

101

Se requiere analizar la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

para **extremos relativos.**

102

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

1. ⌊_____⌋

Determinar $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

103

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

2.1. ⌊_____⌋

- Resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6}$$

$$= \frac{12 \pm 6}{6} = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

104

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Números críticos en que f es estacionaria:

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

2.2. └──────────┘

- Resolver la ecuación

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

$$\frac{1}{3x^2 - 12x + 9} = 0$$

$1 = 0 \leftarrow$ **PCF**

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

no tiene solución.

105

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Números críticos $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

3. └──────────┘

Conclusión: └──────────┘

Respuesta en el cuadro siguiente

Calcular $f'(x)$ para "un valor de x un poco menor" y luego "un poco mayor" que cada uno de los números críticos.

Para $x_1 = 1$

$f'(0) = +9$, $f'(2) = -3$ } hay un **máximo relativo** en 1.

Para $x_2 = 3$

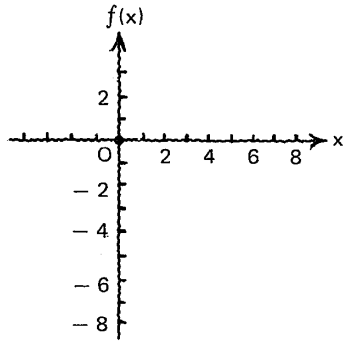
$f'(2) = -3$, $f'(4) = +9$ } hay un **mínimo relativo** en 3.

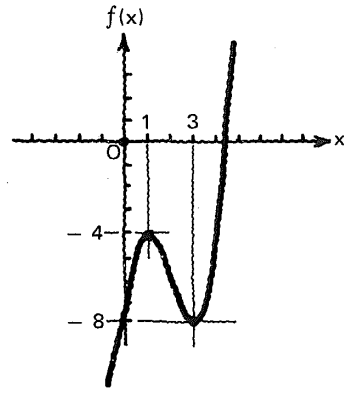
Hay un **máximo relativo** igual a $f(1) = -4$ en $x = 1$ y un **mínimo relativo** igual a $f(3) = -8$ en $x = 3$.

106

Gráfica de

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$





107

Analizar la función

$f(x) = (x^2 - 1)^2$

para sus **extremos relativos.**

108

$f(x) = (x^2 - 1)^2$

1. ⌊_____⌋

Determinar $f'(x)$.

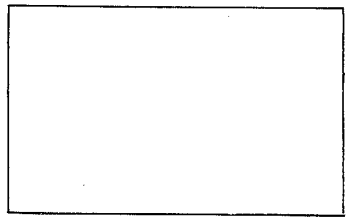
$f'(x) = 2(x^2 - 1) \cdot 2x$
$= 4x(x^2 - 1)$

109

$f(x) = (x^2 - 1)^2$

$f'(x) = 4x(x^2 - 1)$

2.1. [ ]



- Resolver la ecuación $f'(x) = 0$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$4x = 0$ | $x^2 - 1 = 0$

$x = 0$ | $x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$x_1 = -1$

$x_2 = 0$

$x_3 = 1$

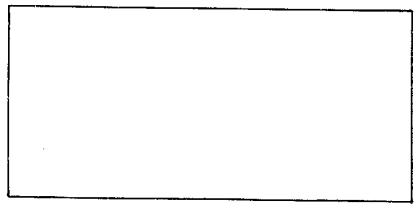
110

$f(x) = (x^2 - 1)^2$

$f'(x) = 4x(x^2 - 1)$

Números críticos en que f es estacionaria: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

2.2. [ ]



- Resolver la ecuación $\dfrac{1}{f'(x)} = 0$

$\dfrac{1}{4x(x^2 - 1)} = 0$ no tiene soluciones

$1 = 0 \leftarrow$ PCF

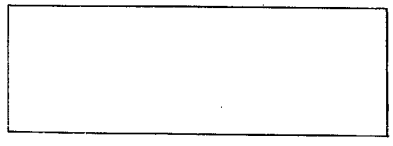
111

$f(x) = (x^2 - 1)^2$

$f'(x) = 4x(x^2 - 1)$

Números críticos $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

3. [ ]



Conclusión: [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente

Calcular $f'(x)$ para un valor de x un poco menor y otro un poco mayor que cada uno de los números críticos.

Para $x_1 = -1$

$f'(-2) = -24$
$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{3}{2}$
} hay un mínimo relativo

Para $x_2 = 0$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{3}{2}$
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$
} hay un máximo relativo

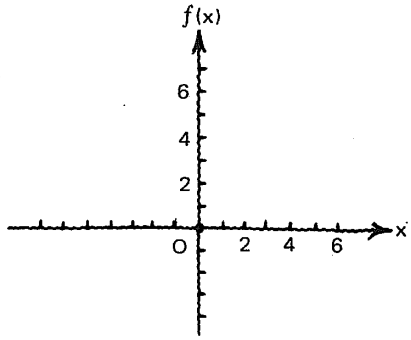
Para $x_3 = 1$

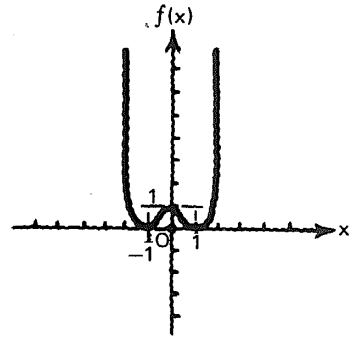
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$
$f'(2) = +24$
} hay un mínimo relativo

- Para $x = -1$, hay un mínimo relativo igual a $f(-1) = 0$
- Para $x = 0$, hay un máximo relativo igual a $f(0) = 1$
- Para $x = 1$, hay un mínimo relativo igual a $f(1) = 0$

112

Gráficamente.





113

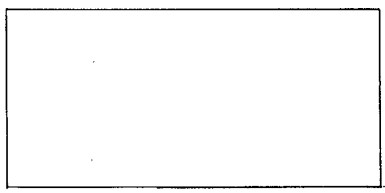
Investigar los **extremos relativos** de la función

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \qquad x \neq 0$$

114

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \qquad x \neq 0$$

1. ┌──────────┐



Determinar $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$$

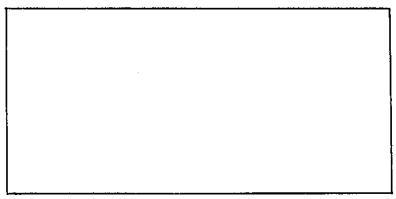
$$= \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

115

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

2.1. ┌──────────┐



- Resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

$$\frac{2x^3 - 2}{x^2} = 0$$

$$2x^3 - 2 = 0$$
$$2x^3 = 2$$
$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

(nos interesan únicamente las raíces reales)

116

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

Número crítico en que la función es estacionaria:

$$x_1 = 1$$

2.2. [ ]

[ ]

- Resolver la ecuación $\frac{1}{f'(x)} = 0$.

$$\frac{x^2}{2x^3 - 2} = 0$$

$x^2 = 0$

$x = 0$

pero la función no está definida para $x = 0$

117

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

Número crítico: $x_1 = 1$

3. [ ]

[ ]

Conclusión: [ ]

Calcular $f'(x)$ para un valor de x un poco menor y luego un poco mayor que cada uno de los números críticos.

Para $x_2 = 1$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -7$

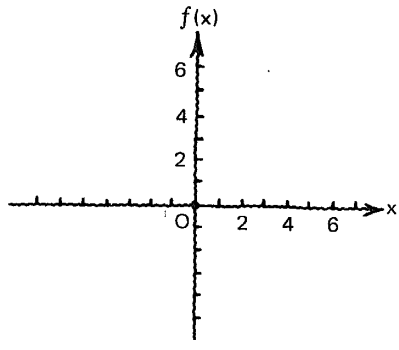
$f'(2) = +\frac{7}{2}$

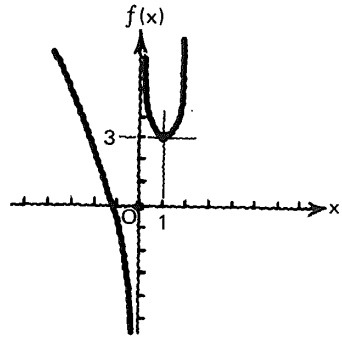
} existe un mínimo relativo

Existe un mínimo relativo igual a $f(1) = 3$ en $x = 1$.

118

Veamos gráficamente lo que pasa.





119

Examinar la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4}$$

para extremos relativos.

120

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4}$$

Dominio de f: _____

$x^2 + 4x + 4 \neq 0$

$(x + 2)(x + 2) \neq 0$

$x + 2 \neq 0$

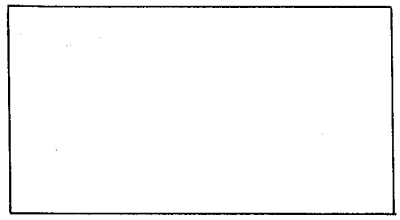
$x \neq -2$

$\{x/x \in \Re \wedge x \neq -2\}$

121

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4} \quad x \neq -2$$

1. _____



Determinar $f'(x)$.

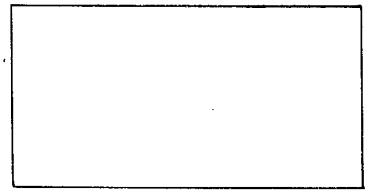
$$f'(x) = \frac{3x - 6}{(x + 2)^3}$$

122

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4} \qquad x \neq -2$$

$$f'(x) = \frac{3x - 6}{(x + 2)^3}$$

2.1. [ ]



Resolver la ecuación

$f'(x) = 0$

$$\frac{3x - 6}{(x + 2)^3} = 0$$

$$3x - 6 = 0$$

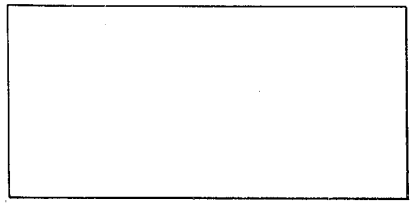
$$x = 2$$

123

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4} \qquad x \neq -2$$

$$f'(x) = \frac{3x - 6}{(x + 2)^3}$$

2.2. [ ]



- Resolver la ecuación

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

$$\frac{(x + 2)^3}{3x - 6} = 0$$

$$(x + 2)^3 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

pero $f(x)$ no existe para $x = -2$

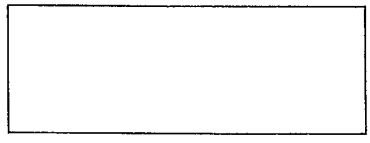
124

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4} \qquad x \neq -2$$

$$f'(x) = \frac{3x - 6}{(x + 2)^3}$$

Número crítico: $x_1 = 2$

3. [ ]



Conclusión: [ ]

- Calcular $f'(x)$ para un valor de x un poco menor y luego un poco mayor que cada uno de los números críticos.
- Para $x_1 = 2$

$$f'(0) = -\frac{3}{4}$$

$$f'(3) = +\frac{3}{125}$$

} hay un mínimo relativo

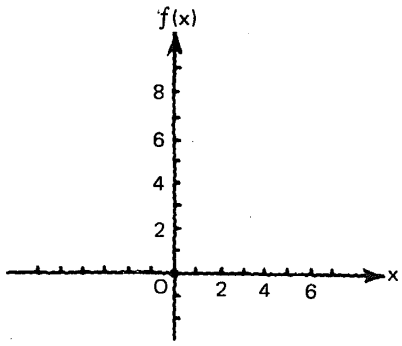
- f tiene un mínimo relativo igual a

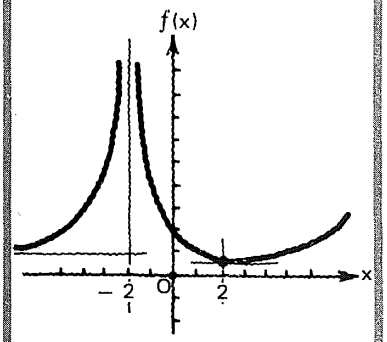
$f(2) = \frac{5}{8}$ para $x = 2$.

125

Representación gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 4x + 4}$$





126

Encontrar los **extremos relativos**, si existen, de la función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

127

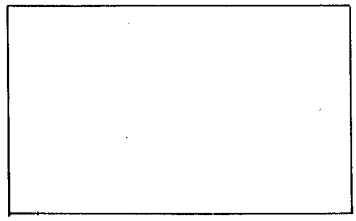
$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Dominio de f: $\mathbb{R}$

128

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

1. ⌊_____⌋



Determinar $f'(x)$.

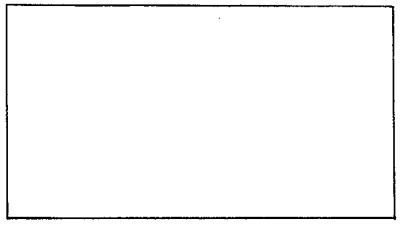
$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

129

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

2.1. ⌊_____⌋



- Resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

$$\frac{2x}{(1 + x^2)^2} = 0$$

$$2x = 0$$

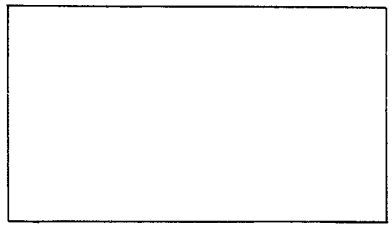
$$x = 0$$

130

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

2.2. ⌊_____⌋



Resolver la ecuación

$$\frac{1}{f'(x)} = 0$$

$$\frac{(1 + x^2)^2}{2x} = 0$$

$$(1 + x^2)^2 = 0$$

$$1 + x^2 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

No hay raíces reales.

131

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

Número crítico $x_1 = 0$

3.

Conclusión:

$x_1 = 0$

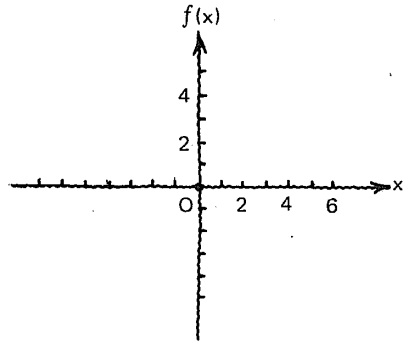
$$\left.\begin{aligned} f'(-1) &= -\frac{1}{2} \\ f'(1) &= +\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$ hay un mínimo relativo

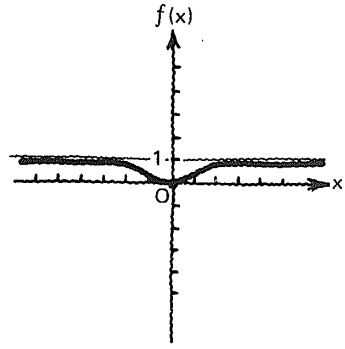
La función tiene un **mínimo relativo** igual a $f(0) = 0$ en $x = 0$.

132

Gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$





133

Sea, ahora, la función

$$f(x) = 3 + (x - 2)^{2/3}$$

que vamos a examinar para extremos relativos.

134

$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}$

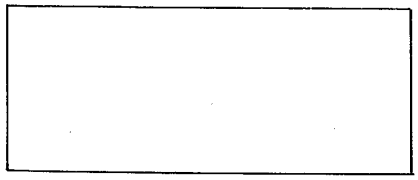
Dominio de f: _____

$\mathbb{R}$

135

$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}$

1.



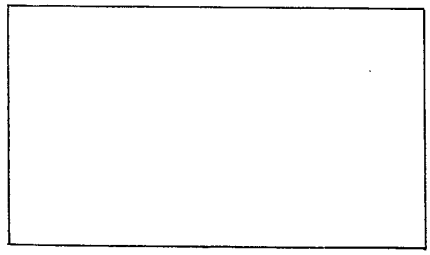
$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

136

$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

2.1.



$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}} = 0$$

$2 = 0 \leftarrow$ **PCF**

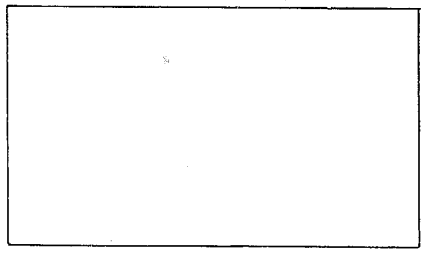
no hay solución.

137

$$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

2.2.



$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{3(x-2)^{1/3}}{2} = 0$$

$$3(x-2)^{1/3} = 0$$

$$(x-2)^{1/3} = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

138

$$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

Número(s) crítico(s): ⌊_____⌋

$x_1 = 2$

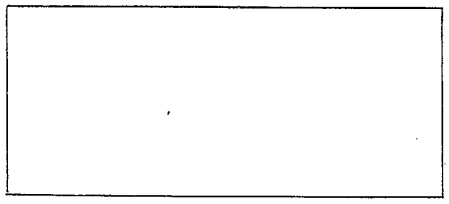
139

$$f(x) = 3 + (x-2)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

Número crítico: $x_1 = 2$

3.



Conclusión: ⌊_____⌋

$x_1 = 2$

$f'(1) = -\frac{2}{3}$

$f'(3) = +\frac{2}{3}$

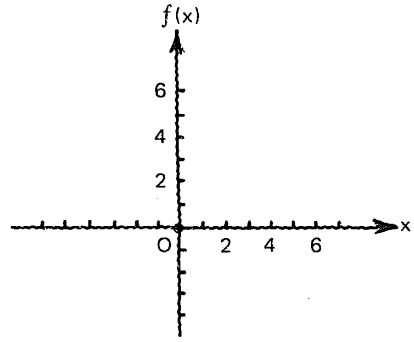
} existe un mínimo relativo

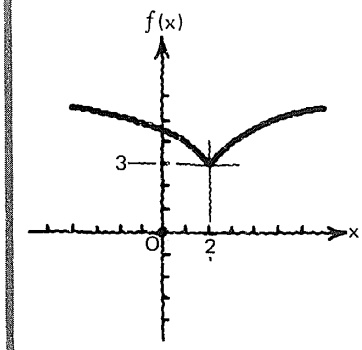
La función f presenta un mínimo relativo igual a $f(2) = 3$ en $x = 2$.

140

Gráfica
de

$f(x) = 3 + (x - 2)^{2/3}$





7.6.2.1

Práctica adicional
de
determinación
de los extremos relativos
de una función
aplicando el criterio de la primera
derivada, si se considera necesario.

7.6.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* los extremos relativos de una función dada, aplicando el criterio de la primera derivada.

6.3

Extremos absolutos
de una función

141

Atención.

Hemos encontrado que, la función definida por

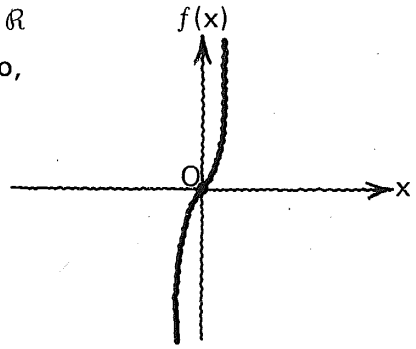
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 10x \qquad x \in \mathbb{R}$$

cuya gráfica tiene este aspecto,
no tiene **extremos relativos.**
Ahora bien,
¿tiene f un valor
máximo absoluto?

Sí/No

¿tiene f un valor
mínimo absoluto?

Sí/No



No
No

f crece sin límite cuando $x \to +\infty$ y decrece sin límite cuando $x \to -\infty$.

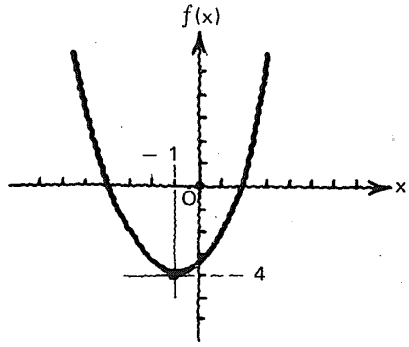
142

La función

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

tiene un **mínimo relativo**
en $x = -1$, y es igual
a $f(-1) = -4$.
¿Tiene esta función un valor
máximo absoluto?

Sí/No

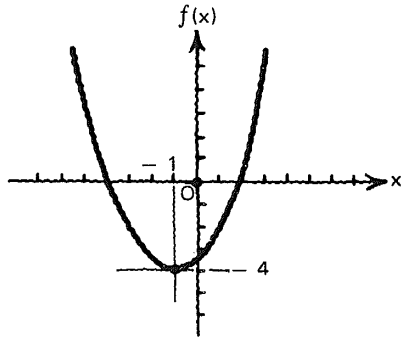


No

143

Señalar la opción correcta.

f { no tiene **mínimo absoluto**
tiene un **mínimo absoluto**
igual a ____
en x = ____



tiene un mínimo absoluto igual a -4, en $x = -1$

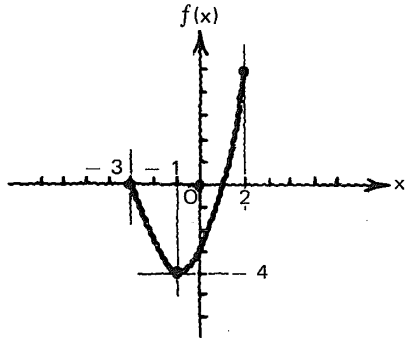
144

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

En el intervalo $[-3, 2]$

f tiene:

un valor **máximo absoluto**
igual a ____
en x = ____
y
un valor **mínimo absoluto**
igual a ____
en x = ____

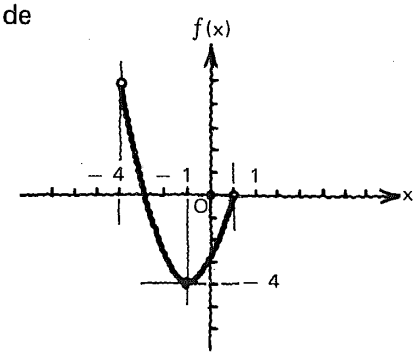


- 5
- 2
- -4
- -1

145

Mucha atención.

Dar los **extremos absolutos** de
$f(x) = x^2 + 2x - 3$
en el intervalo
(–4, 1).



Mucha atención.

mínimo absoluto
igual a -4 en $x = -1$

f **no** tiene
máximo absoluto

146

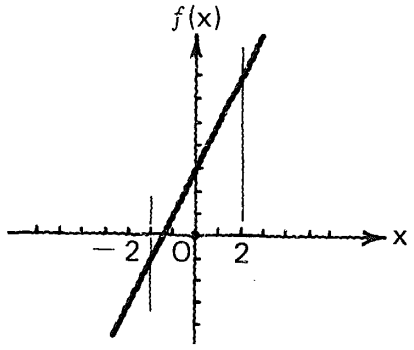
$f(x) = 2x + 3$

f no tiene extremos relativos;

f **tiene/no tiene** extremos absolutos, si su dominio es $\mathbb{R}$;

f **tiene/no tiene** extremos absolutos en el intervalo $(-2, 2)$;

f **tiene/no tiene** extremos absolutos en el intervalo $[-2, 2]$.



no tiene

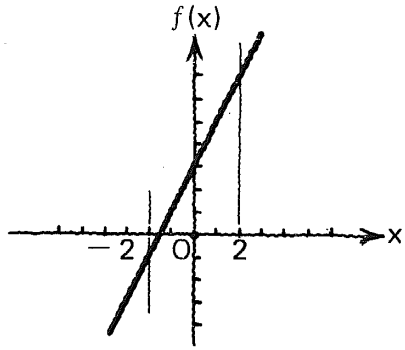
no tiene

tiene

147

$f(x) = 2x + 3$

Dar los **extremos absolutos** de f, si su dominio es el intervalo $[-2, 2]$.



máximo absoluto igual a 7 en $x = 2$

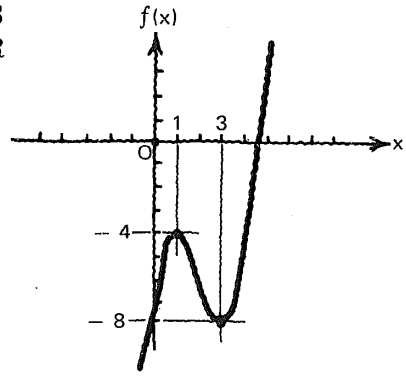
mínimo absoluto igual a -1 en $x = -2$

148

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$
$x \in \mathbb{R}$

Máximo absoluto:

Mínimo absoluto:



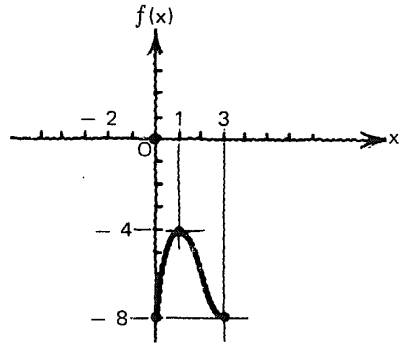
no existe

no existe

149

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

$0 \leqslant x \leqslant 3$



Máximo absoluto:

igual a -4 en $x = 1$

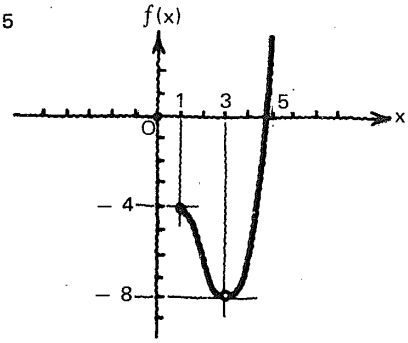
Mínimo absoluto:

igual a -8 en $x = 0$ o en $x = 3$

150

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

$1 \leqslant x < 5$



Máximo absoluto:

no existe

Mínimo absoluto:

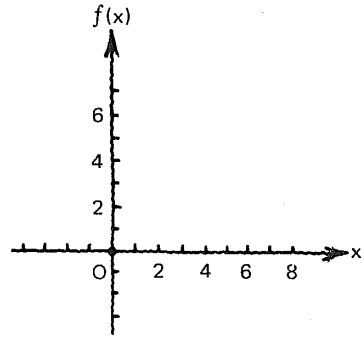
no existe

151

La función f está definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leqslant 2 \\ -x + 7 & \text{si } 2 < x \leqslant 7 \end{cases}$$

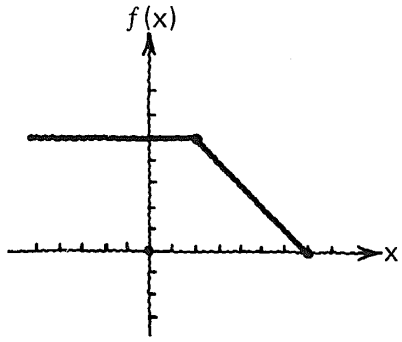
y su gráfica cartesiana es →



Respuesta en el cuadro siguiente

Máximo absoluto:

Mínimo absoluto:



igual a 5 para $x \leqslant 2$

igual a 0 para $x = 7$

152

Decimos, entonces, que:
una función f presenta en un intervalo dado, un valor **máximo absoluto** igual a $f(x_1)$,
si x_1 es un número del intervalo tal que

$$f(x_1) \geqslant f(x)$$

para toda x en el intervalo.

153

En forma análoga:
una función f presenta, en un intervalo dado, un valor **mínimo absoluto** igual a $f(x_1)$,
si x_1 es un número del intervalo tal que

$$f(x_1) \leqslant f(x)$$

para toda x en el intervalo.

7.6.3.1

Práctica adicional
de
determinación
de los
extremos absolutos
de una función dada,
si se considera necesario.

7.6.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

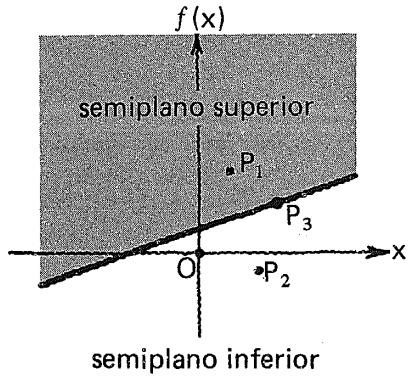
- *determinar* los extremos absolutos
  de una función dada.

6.4

Concavidad y puntos de inflexión

154

Recordemos que:
cualquier recta no vertical
divide al plano
en **dos semiplanos**
uno **superior** y el otro
inferior.
Un punto del plano
puede estar contenido
en el semiplano superior (P_1),
en el semiplano inferior (P_2)
o en la recta misma (P_3).



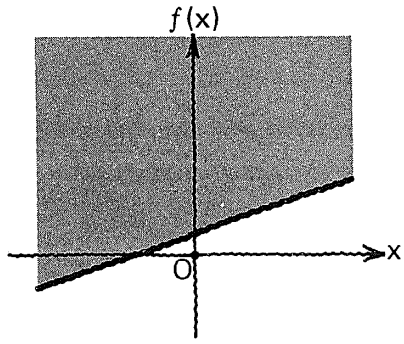
155

A la unión del
semiplano superior
y la recta (frontera)
le llamaremos

semiplano cerrado superior

y a la unión del
semiplano inferior
y la recta (frontera)
le llamaremos

semiplano cerrado inferior.



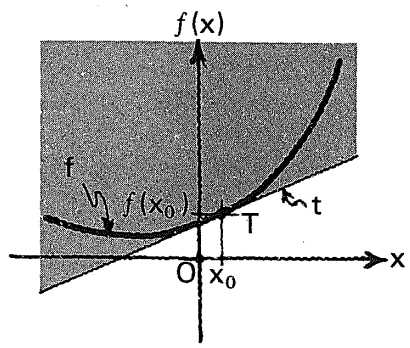
156

Ahora bien,
la recta t
es la tangente
a la curva f
en el punto $T = [x_0, f(x_0)]$.

Si la **curva** está
contenida
completamente
en el semiplano
cerrado superior
decimos que es

cóncava hacia arriba

en x_0.

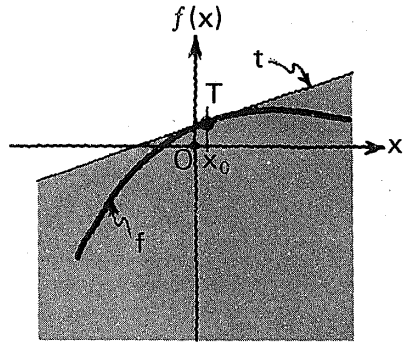


157

Si la **curva**
está completamente
contenida
en el semiplano cerrado
inferior
decimos que es

cóncava hacia abajo

en x_0.

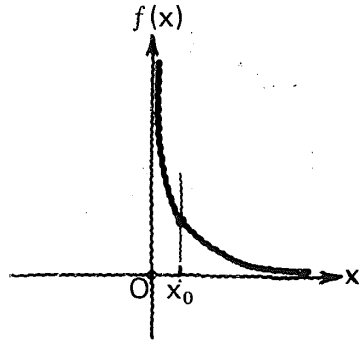


158

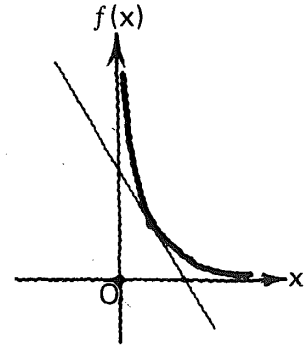
La curva mostrada
es

cóncava hacia arriba/hacia abajo

en x_0.



● **cóncava hacia arriba**

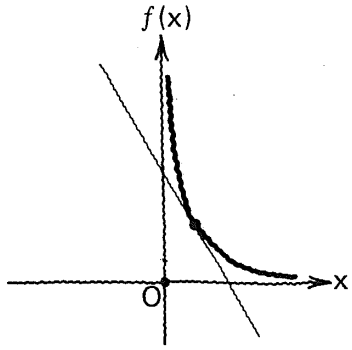


159

La curva f

es/no es
cóncava hacia arriba

para todos
los números de su dominio.



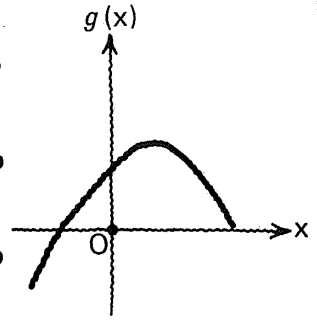
es

160

Señalemos la opción correcta.

La curva g

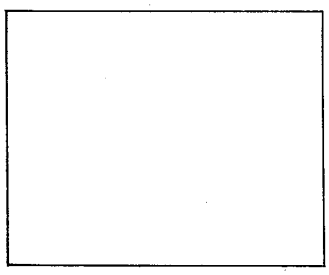
- es cóncava hacia arriba para algunos números de su dominio
- es cóncava hacia arriba para todos los números de su dominio
- es cóncava hacia abajo para algunos números de su dominio
- es cóncava hacia abajo para todos los números de su dominio

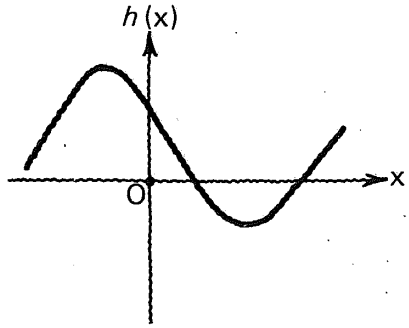


es cóncava hacia abajo
para todos los números
de su dominio

161

La curva correspondiente
a la función h,
es:





cóncava hacia abajo
para algunos números
de su dominio,
y
cóncava hacia arriba
para algunos números
de su dominio

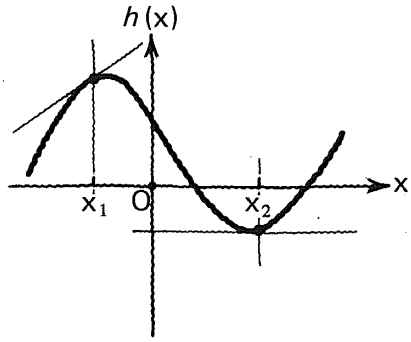
162

Por ejemplo,
en x_1
h es

[ ]

y en x_2
h es

[ ]



cóncava hacia abajo

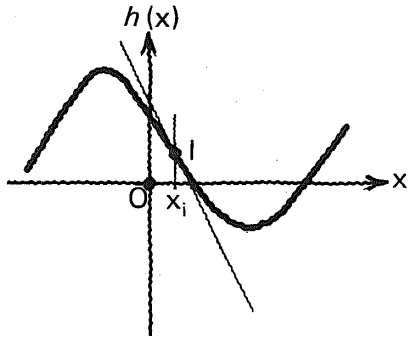
cóncava hacia arriba

163

Existe un punto I
en que la curva h
no es cóncava hacia abajo
ni
cóncava hacia arriba.
En tal punto,
que llamaremos

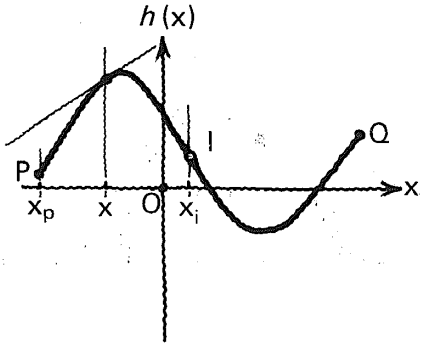
punto de inflexión

la concavidad cambia.



164

Para cualquier punto
comprendido entre
P e I, es decir,
para $x_P \leqslant x < x_i$
el arco PI queda
completamente
contenido en el
semiplano cerrado inferior
limitado por la
tangente a la curva.
Decimos que:
en el intervalo $[x_P, x_i)$
la curva es cóncava hacia abajo.

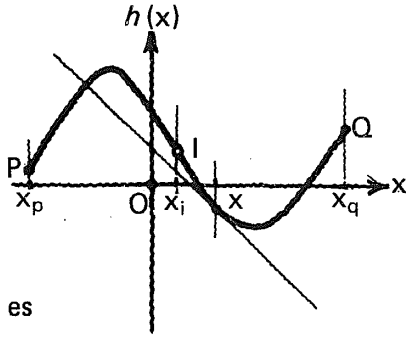


165

Para cualquier x, tal que

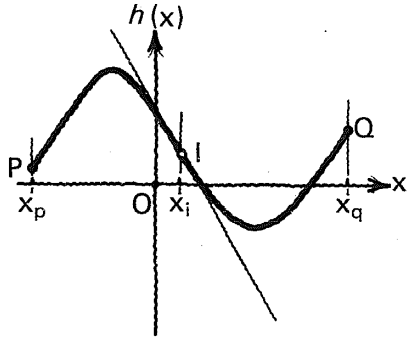
$$x_i < x \leqslant x_q$$

el semiplano cerrado superior limitado por la tangente a la curva contiene completamente al arco $\widehat{IQ}$.
Decimos que:
en el intervalo $(x_i, x_q]$ la curva es cóncava hacia arriba.



166

En x_i,
la curva no es cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo.
La recta tangente en I, "atraviesa a la curva".

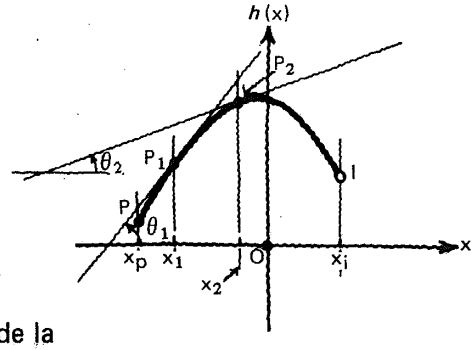


167

El **arco** $\widehat{PI}$
es

cóncavo hacia abajo.

Si observamos con atención,
podemos ver que:
a medida que nos movemos a lo largo de la curva, de izquierda a derecha,
el valor de la pendiente de la recta tangente disminuye.

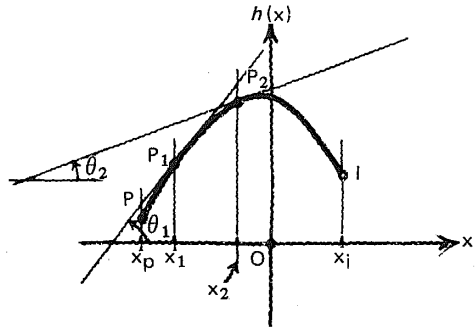


168

Si x experimenta el incremento positivo Δx $h'(x)$ se incrementa negativamente en $\Delta h'(x)$. La razón de los dos incrementos

$$\frac{\Delta h'(x)}{\Delta x}$$

es **positiva/negativa.**



negativa

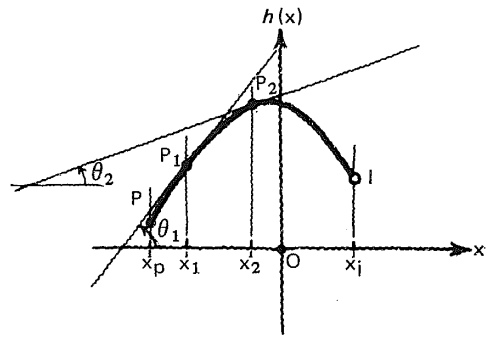
169

Quiere decir que:
en el intervalo $[x_p, x_i]$
la función $h'(x)$ es

creciente/decreciente.

En otras palabras:
la derivada de $h'(x)$ es

positiva/negativa.



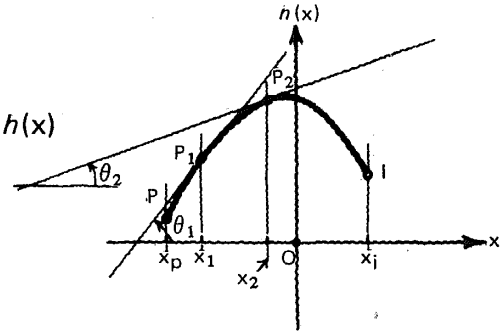
decreciente

negativa

170

Pero,
la derivada de $h'(x)$
es
la segunda derivada de $h(x)$

$$\frac{d[h'(x)]}{dx} = h''(x)$$

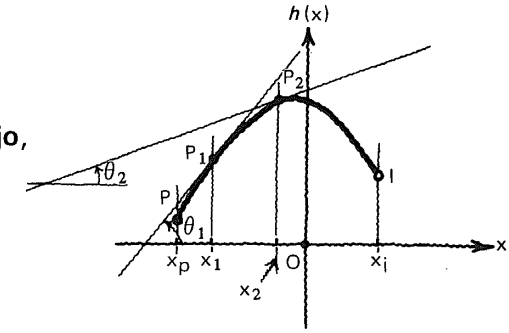


171

Entonces:

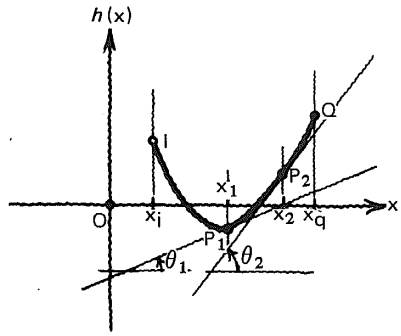
si en un determinado intervalo,
h **es cóncava hacia abajo,**
deberá verificarse que:

$h''(x) < 0$.



172

Hagamos un razonamiento similar para un **arco cóncavo hacia arriba.**
A medida que nos movemos a lo largo de la curva, de izquierda a derecha el valor de la pendiente de la recta tangente **aumenta/disminuye.**



aumenta

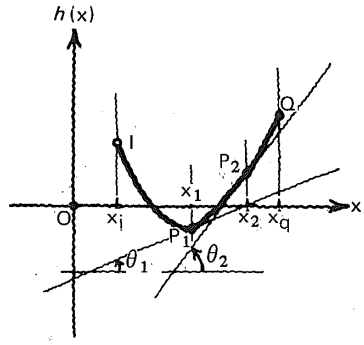
173

Si
x experimenta el incremento positivo Δx,
$h'(x)$ experimenta un incremento **positivo/negativo** $\Delta h'(x)$.

La razón de ambos incrementos

$$\frac{\Delta h'(x)}{\Delta x}$$

es **positiva/negativa.**



positivo

positiva

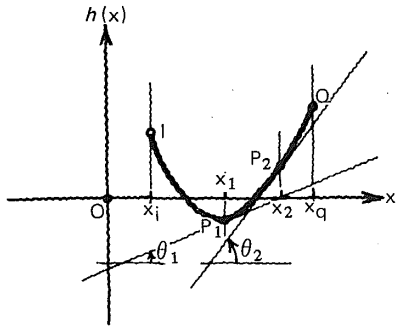
174

En el intervalo $(x_i, x_q]$
la función $h'(x)$ es

creciente/decreciente.

Es decir que:
la derivada de $h'(x)$ es

positiva/negativa.



creciente

positiva

175

Como la derivada de $h'(x)$
es igual a

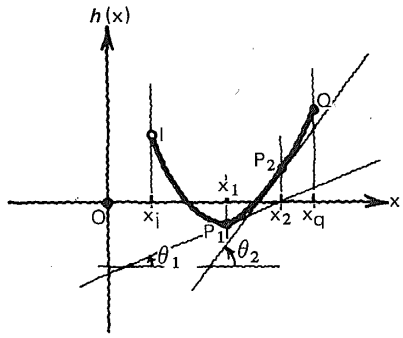
_____

o simbólicamente

_____

concluimos que:
Si en un determinado intervalo
h **es cóncava hacia arriba,**
deberá verificarse que

_____



la segunda derivada de
$h(x)$

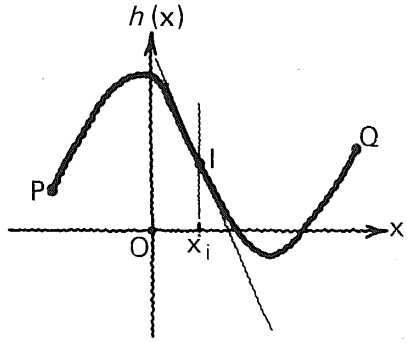
$$\frac{d[h'(x)]}{dx} = h''(x)$$

$h''(x) > 0$

176

Si en un cierto número x_i,
la curva no es
cóncava hacia arriba
ni
cóncava hacia abajo,
es decir que,
$I = [x_i, h(x_i)]$
es un **punto de inflexión,**
deberá verificarse que

_____

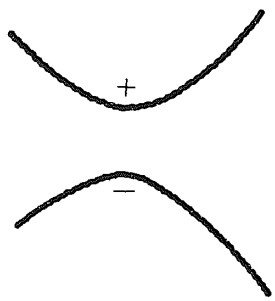


$h''(x) = 0$

177

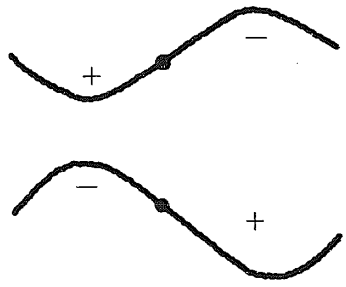
En general,

- Si $f''(x_0) > 0$
  entonces,
  la curva representativa de f
  es cóncava hacia arriba en x_0.
- Si $f''(x_0) < 0$
  entonces,
  la curva f
  es cóncava hacia abajo en x_0.



178

- Si $f''(x_0) = 0$
  y
  $f''(x)$ **cambia de signo**
  al pasar por x_0
  entonces,
  f **tiene un punto de**
  inflexión en x_0.



179

Regresemos a la función
que hemos empezado a analizar
al principio de este módulo.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

Queremos, ahora, conocer
los intervalos en que f
es **cóncava hacia abajo** y
aquellos en que
es **cóncava hacia arriba.**

180

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

Hemos encontrado

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

Por ejemplo, deseamos saber si para $x = -1$ la curva f es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

181

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

Empezamos por calcular la segunda derivada de f.

$f''(x) =$ [_____]

$2x + 1$

182

Función original

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

Primera derivada

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

Segunda derivada

$$f''(x) = 2x + 1$$

Para $x = -1$

$f''(-1) =$ [_____]

por lo tanto:
f es **cóncava hacia arriba/cóncava hacia abajo.**

-1

cóncava hacia abajo

183

$f''(x) = 2x + 1$

Para $x = 2$
f es **cóncava hacia arriba/cóncava hacia abajo**

puesto que $f''(2) =$ [ ]

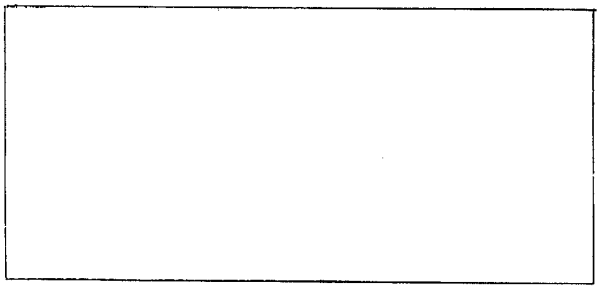
cóncava hacia arriba

$+5$

184

$f''(x) = 2x + 1$

Determinemos los
puntos de inflexión de f.



→ [ ]

Resolvemos:

$f''(x) = 0$

$2x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

Para un valor de x un poco menor que $-\frac{1}{2}$, digamos $x = -1$

$f''(-1) = -1$

Para un valor de x un poco mayor que $-\frac{1}{2}$ digamos $x = 0$

$f''(0) = +1$

Entonces:

f tiene un punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$

185

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1$$

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

$$f''(x) = 2x + 1$$

f tiene un punto de inflexión y es:

$\left(-\frac{1}{2}, \text{[ ]}\right)$

$\frac{49}{12}$

186

Al pasar por el punto

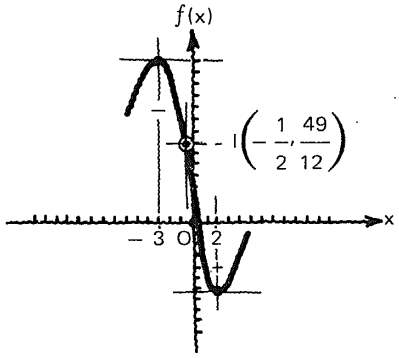
$$I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{49}{12}\right)$$

la concavidad de la curva cambia.
En el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$,

f es cóncava hacia abajo

y
en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

f es cóncava hacia arriba.

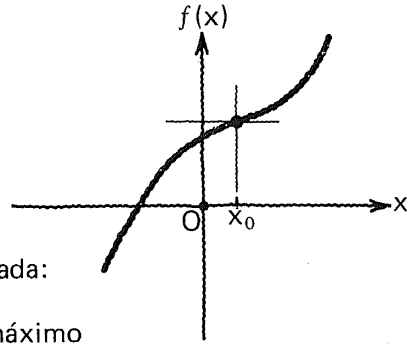


187

Ahora bien,
hemos visto que
no basta que se verifique

$f'(x_0) = 0$

para poder concluir que
f tiene un extremo relativo
en x_0.
Para la función aquí representada:
$f'(x_0) = 0$
y sin embargo, f no tiene un máximo
ni un mínimo relativo en x_0.



188

De manera similar,
no basta que se cumpla:

$$f''(x_0) = 0$$

para asegurar que
hay un punto de inflexión
en x_0.

189

Consideremos la función

$$f(x) = x^3$$

cuya
primera y segunda
derivadas son:

$f'(x) =$ [ ]

$f''(x) =$ [ ]

$3x^2$

$6x$

190

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

Se cumple: $f'(0) = 0$

$f'(-1) = +3$
$f'(1) = +3$

y como el signo de $f'(x)$ no cambia
cuando la función pasa por $x = 0$
concluimos que:

[ ]

no existe un máximo ni
un mínimo relativo en
$x = 0$

191

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

También:
se cumple: $f''(0) = 0$

$f''(-1) =$ [ ]

$f''(1) =$ [ ]

y como el signo de $f''(x)$ **cambia/no cambia**
cuando la función pasa por $x = 0$
concluimos que: [ ]

-6

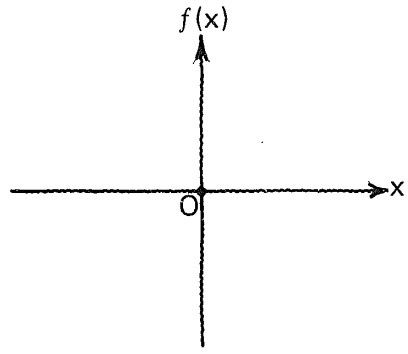
$+6$

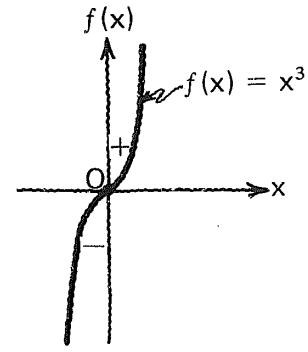
cambia

existe un punto de
inflexión en $x = 0$

192

Veámoslo gráficamente.





193

Sea, ahora, la función

$f(x) = x^4$

$f'(x) =$ [ ]

$f''(x) =$ [ ]

$4x^3$

$12x^2$

194

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

Investigación de los extremos relativos de esta función:

[ ]

Conclusión: [ ]

$f'(0) = 0$

$f'(-1) = -4$

$f'(1) = +4$

Existe un mínimo relativo en $x = 0$, y es igual a $f(0) = 0$

195

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

Investigación de los puntos de inflexión de f.

Conclusión: [ ]

$f''(x) = 0$

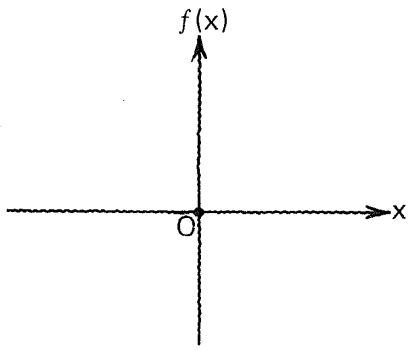
$f''(-1) = +12$

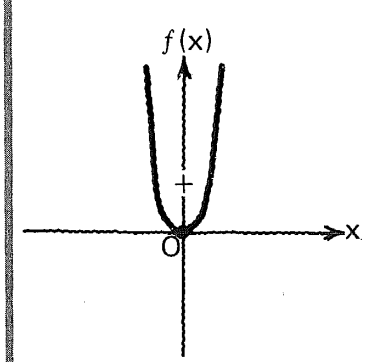
$f''(1) = +12$

f no tiene puntos de inflexión (es cóncava hacia arriba para todos los números de su dominio)

196

Gráficamente,





197

Tomemos, finalmente la función

$f(x) = -x^4$

Calculemos la primera y la segunda derivada.

$f'(x) =$ [ ]

$f''(x) =$ [ ]

$-4x^3$

$-12x^2$

198

$f(x) = -x^4$

$f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2$

Análisis de f para extremos relativos:

Conclusión:

$f'(0) = 0$

$f'(-1) = +4$

$f'(1) = -4$

f tiene un máximo relativo en $x = 0$

199

$f(x) = -x^4$

$f'(x) = -4x^3$

$f''(x) = -12x^2$

Análisis para los puntos de inflexión de f:

Conclusión:

$f''(0) = 0$

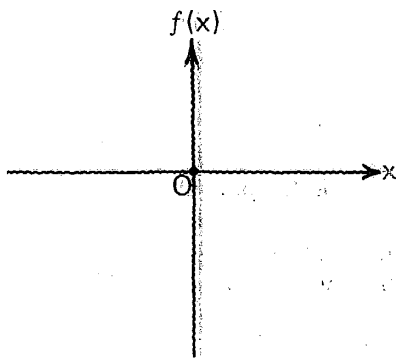
$f''(-1) = -12$

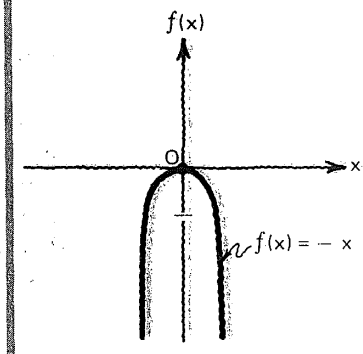
$f''(1) = -12$

f no tiene punto de inflexión en $x = 0$ (es cóncava hacia abajo en todos los números de su dominio).

200

Gráfica de $f(x) = -x^4$.



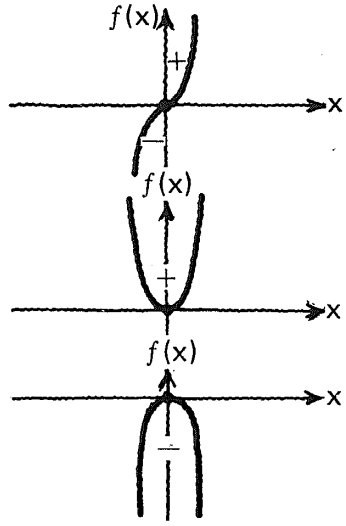


201

Para las 3 funciones analizadas,
se verifica

$f''(0) = 0$

sin embargo,
únicamente para una de ellas
existe punto de inflexión
en x = 0.



7.6.4.1

Práctica adicional
de
determinación de los intervalos
en que una función dada
es cóncava hacia arriba
o hacia abajo,
si se considera necesario.

7.6.4.2

Práctica adicional
de
determinación de los puntos
de inflexión
de una función dada,
si se considera necesario.

7.6.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de

- *determinar* los intervalos en que una función dada es cóncava hacia arriba o hacia abajo;
- *determinar* los puntos de inflexión de una función dada.

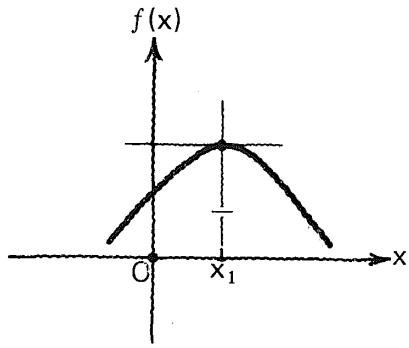
6.5

Extremos relativos. Criterio de la segunda derivada

202

Observemos que:
en un número x_1 en que
una función f es estacionaria y
existe un **máximo relativo**
se verifica que:

$f'(x_1) =$ [ ]
y
$f''(x_1) =$ [ ]



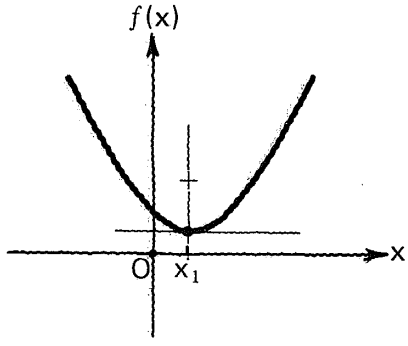
0

< 0

203

Asimismo,
en un número x_1
en que
la función es estacionaria
y
existe un **mínimo relativo**
se verifica que:

$f'(x_1)$ [ ]
y
$f''(x_1)$ [ ]



$= 0$

> 0

204

Si $f'(x_1) = 0$

y $f''(x_1) = 0$

nada podemos decir acerca de los extremos relativos de la función en x_1, como hemos podido darnos cuenta a través del análisis que hemos hecho de las funciones:

$f_1(x) = x^3$

$f_2(x) = x^4$

$f_3(x) = -x^4$

$f_1(x) = x^3$

$f_1'(0) = 0$

$f_1''(0) = 0$

ni máx ni mín en $x = 0$

$f_2(x) = x^4$

$f_2'(0) = 0$

$f_2''(0) = 0$

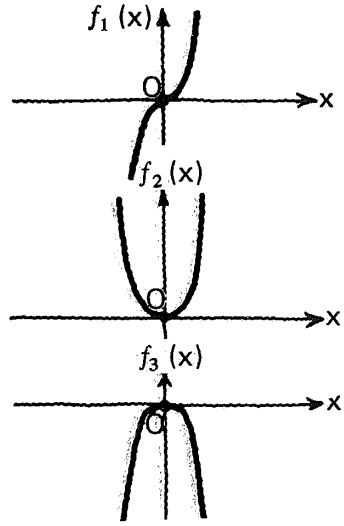
mín en $x = 0$

$f_3(x) = -x^4$

$f_3'(0) = 0$

$f_3''(0) = 0$

máx en $x = 0$



205

Esto nos permite introducir una variante en el **procedimiento** que hemos estudiado para la investigación de los **extremos relativos** de una función.

206

En el paso 3, se calcula la segunda derivada

$f''(x)$

y se evalúa para cada una de las raíces reales encontradas en 2.1, para la ecuación $f'(x) = 0$.

- Si $f''(x_1) > 0$ existe un mínimo relativo en x_1.
- Si $f''(x_1) > 0$ existe un mínimo relativo en x_1.

x_1 es cada una de las raíces reales de la ecuación $f'(x) = 0$.

207

Tenemos la función

$$f(x) = x^3 - 4x + 4$$

que se requiere analizar para
extremos relativos,
utilizando el llamado
criterio de la segunda derivada.

208

$$f(x) = x^3 - 4x + 4$$

1. Determinar $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

209

$$f(x) = x^3 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

2.1. Resolver la ecuación $f'(x) = 0$.

210

$f(x) = x^3 - 4x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

Números críticos en que la función es estacionaria $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

2.2. Resolver la ecuación $\dfrac{1}{f'(x)} = 0$

$\dfrac{1}{3x^2 - 4} = 0$

no tiene solución.

211

$f(x) = x^3 - 4x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

Números críticos $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

3. Calcular $f''(x)$ para cada uno de los números críticos encontrados.

$f''(x) = 6x$

Para x_1:

$f''(x_1) = 6\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -4\sqrt{3}$

Para x_2:

$f''(x_2) = 6\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = +4\sqrt{3}$

Conclusión:

hay un **máximo relativo** en $x = -2\sqrt{3}/3$

hay un **mínimo relativo** en $x = 2\sqrt{3}/3$

7.6.5.1

Práctica adicional
de
determinación de los extremos
relativos de una función
aplicando
el criterio de la segunda derivada,
si se considera necesario.

7.6.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* los extremos relativos de una función dada, aplicando el criterio de la segunda derivada.

7.6.5.2

PROBLEMAS DE APLICACIÓN
de los conceptos estudiados.